Vermischte Aufgaben
der
mathematischen Geographie
und sphärischen Astronomie
Von Dr. Carl Schoy

Königlicher
Münster i. W.
Seminarlehrerkursus

As
S

Vermischte Aufgaben

der

mathematischen Geographie und sphärischen Astronomie

mit vollständigen Lösungen.

Zum Gebrauch für den Unterricht an höheren Schulen sowie beim Selbststudium.

J. N. 58.

Königlicher
Münster i. W.
Seminarlehrerkursus

Von

Karl
Dr.-Ing., Dr. phil. (Carl) Schoy,
Oberlehrer am städtischen Gymnasium zu Essen a. d. R.

Mit 24 Figuren auf einer Tafel.

UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY

562435
1. 5. 53

Hamburg
Henri Grand
1913.

Vorwort.

Wennschon wir zu allen einzelnen Wissenszweigen der Mathematik zahlreiche und zum Teil ausgezeichnete Aufgabensammlungen besitzen, so haben wir es gleichwohl in der sphärischen Trigonometrie zu einer solchen noch nicht gebracht. Gewöhnlich ist der Übungsstoff zu dieser Disziplin in einem Appendix zum Lehrbuch untergebracht. Fast stets sind es dieselben Beispiele, die in allen trigonometrischen Lehrbüchern wiederkehren und die man als Aufgaben in Reifeprüfungen gestellt findet. Das ist wohl darin begründet, daß die sphärische Trigonometrie trotz ihrer reizvollen Anwendungen, die astronomische Geographie und Nautik ihr bieten, leider immer noch das Stiefkind des mathematischen Unterrichts in den Oberklassen unserer höheren Schulen ist. Tatsache ist es freilich auch, daß die meisten Lehrer der Mathemathik während ihres Universitätsstudiums keine Gelegenheit hatten, etwas über sphärische Trigonometrie zu hören. Eine Ausnahme machen allerdings die Vorlesungszyklen an den Technischen Hochschulen zu München und Stuttgart, und eine gewisse Rückprojektion auf den trigonometrischen Unterricht in bayerischen und württembergischen höheren Schulen ist unverkennbar.

Gewiß mag mancher Lehrer bei seinem Unterricht in der sphärischen Trigonometrie sich eines unbefriedigten Gefühls nicht erwehren können, wenn er sieht, wie sein Programm allmählich in völliger Uniform erstarrt. Er fühlt aber gleichzeitig, daß das Suchen nach neuen und schönen Aufgaben nicht so leicht ist, da sie alle in ungezählten Annalen und Kompendien zerstreut sind. Und doch, wieviel Besseres könnte dem Lernenden und Studierenden in dieser Hinsicht geboten werden! Gauß selbst hat die Anwendung der sphärischen Trigonometrie auf die mathematische Erd- und Himmelskunde als überaus instruktiv wärmstens empfohlen. (Vgl. den Aufsatz von Gauß: „Über eine Aufgabe der sphärischen Astronomie"; Monatl. Korrespondenz zur Beförderung der Erd- und Himmelskunde, von Zach, 1799.)

Hier einmal gründlich Wandel zu schaffen, ist in erster Linie der Zweck vorliegender Sammlung. Da gerade Mangel an historischer Orientierung es ist, der Unterricht und Studien nachteilig beeinflußt, so glaubte ich in der Beifügung geschichtlicher Daten und Literaturangaben möglichst weit gehen zu müssen. Man wird nach keiner der bekannteren, von unseren

Meistern oft geradezu klassisch behandelten Aufgaben, vergeblich suchen, und wo es nur möglich war, ist jeder ihr Heimatsschein beigegeben. Aber nicht nur dem Lehrer der Oberklassen höherer Lehranstalten will ich eine Art Vademecum durch das bezeichnete Gebiet geben: das Werkchen wendet sich auch an den Studierenden der Hochschule und an den Astronomen sowohl als Geographen und Nautiker von Fach. Einige der behandelten Aufgaben sind nicht ganz leicht, da ich der höheren Mathematik nicht entraten wollte, wenn die Sammlung wirklich wertvoll sein soll.

Noch seien mir einige Bemerkungen über den Inhalt selbst gestattet. Es war nicht angängig, den Stoff nach irgendwelchen festen Grundsätzen zu ordnen. Da sich speziell über Polhöhenbestimmungen einigermaßen Einheitlichkeit erreichen läßt, so habe ich alle diesbezüglichen Beispiele im ersten Abschnitt gebracht. Ihre Zahl ist, wie ich wohl weiß, damit noch nicht erschöpft. Allein ich trug doch berechtigte Bedenken, jene verwickelten Gleichungen achten Grades aufzunehmen, die ich in meinen Beiträgen zur Nautischen Astronomie (Aus dem Archiv der Deutschen Seewarte 1910, No. 1) entwickelte. Auch mußte ich, so ungern ich es tat, auf jede Aufgabe über die Ortsbestimmung im Luftballon verzichten. Die Methoden von Brill Kohlschütter, Marcuse u. a. eignen sich nicht zur Aufnahme in eine Aufgabensammlung.

Den Forderungen F. Kleins, im Mathematikunterricht stets das funktionale Denken zu fördern, bin ich dadurch nachgekommen, daß ich im zweiten Abschnitt Lösungen mittels der Hyperbelfunktionen gab. Die Zeit, in der man dieses höchst nützliche mathematische Hilfsmittel in Deutschland einfach beiseite schob, wird hoffentlich vorüber sein. (Vgl. meinen Aufsatz: „Einige Neuerungsvorschläge zum Unterricht in der mathematischen Erdkunde", Natur und Kultur, 1909.)

Nicht unwillkommen dürften dem Lehrer auch die Aufgaben des dritten Abschnitts: Sphärische Maxima und Minima sein. Ihre Zahl ist freilich gering, aber durch Nachbildungen ähnlicher Art läßt sie sich wohl vermehren.

Der vierte Abschnitt bringt verschiedene neue Aufgaben über die Bestimmung der Sonnendeklination auf gnomonischem Wege.

Endlich habe ich in einem fünften Abschnitt Kurven betrachtet, auf welche man sich durch bestimmte Aufgaben, hauptsächlich der älteren praktischen Astronomie geführt sieht. Auch hier sind fast sämtliche Aufgaben ganz neu.

Dem Verleger, Herrn Henri Grand, möchte ich an dieser Stelle für sein bereitwilliges Entgegenkommen und das Interesse, das er meinem Buche bewiesen hat, den verbindlichsten Dank aussprechen.

Essen a. R., im April 1913. C. Schoy.

I. Abschnitt.

Bestimmung der geographischen Breite.

1. Aufgabe. Aus der Dauer des längsten oder kürzesten Tages an einem Orte dessen geographische Breite oder Polhöhe zu berechnen.

Diese Art der Polhöhenbestimmung war schon Hipparch und Ptolemäus bekannt. Für ihre Breitentabellen sammelten sie die Angaben über die Dauer des längsten und kürzesten Tages allerorts. Wie Hipparch die eigentliche Rechnung durchführte, wissen wir nicht, wohl aber ist uns die Sehnenrechnung des Ptolemäus erhalten geblieben. Sie basiert in der Hauptsache auf dem Transversalensatz des Menelaus. (Vgl. über nähere Details: C. Schoy: „Die geschichtliche Entwicklung der Polhöhenbestimmungen bei den älteren Völkern", 1911, Aus dem Archiv der Deutschen Seewarte.)

1. Falls die Dauer des längsten Tages bekannt ist, hat man die Sonnendeklination $= +\varepsilon$ (Ekliptikschiefe) zu setzen. Für einen beliebigen Sonnenort gibt das Zenit-Pol-Sonnendreieck:

$$\sin h = \sin\varepsilon \cdot \sin\varphi + \cos\varepsilon \cdot \cos\varphi \cdot \cos s \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (I)$$

Im Moment des Sonnenauf- oder untergangs wird $h = 0^0$ und $s =$ dem Stundenwinkel des halben Tagbogens der Sonne $= s_0$. Dann geht (I) über in

$$0 = \sin\varepsilon \cdot \sin\varphi + \cos\varepsilon \cdot \cos\varphi \cdot \cos s_0,$$

woraus sofort folgt:

$$\operatorname{tang}\varphi = -\cos s_0 \cdot \operatorname{cotg}\varepsilon = \cos(180^0 - s_0) \cdot \operatorname{cotg}\varepsilon \quad . \quad . \quad . \quad (II)$$

2. Falls aber s_0 den Tagbogen des kürzesten Tages darstellt, hat man $+\varepsilon$ mit $-\varepsilon$ zu vertauschen, womit (II) sich verwandelt in

$$\operatorname{tang}\varphi = \cos s_0 \cdot \operatorname{cotg}\varepsilon \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (III)$$

Es bedarf wohl kaum eines Hinweises, daß man die Formeln (II) und (III) auch direkt aus den rechtwinkligen sphärischen Dreiecken PU_1H_1 und PU_2H_2 der Fig. 1 ablesen kann. Aus dem ersten Dreieck hat man:

$$\cos(180^0 - s_0) = \operatorname{cotg}(90^0 - \varphi) \cdot \operatorname{cotg}(90^0 - \varepsilon) = \operatorname{tang}\varphi \cdot \operatorname{tang}\varepsilon,$$

während nach derselben Neperschen Regel für das zweite Dreieck sich ergibt:

$$\cos s_0 = \operatorname{cotg}(90^0 + \varepsilon) \cdot \operatorname{cotg}(\varphi - 90^0) = \operatorname{tang}\varphi \cdot \operatorname{tang}\varepsilon.$$

Zahlenbeispiel: In seinem Almagest (lib. I, Cap. XII) gibt Ptolemäus für Hipparchs Zeiten die Schiefe der Ekliptik zu $\varepsilon = 23^0 51'$ an. Unter welcher Breite liegen dann die Städte Tyrus, Syracus und Athen, wenn an diesen Orten nach Ptolemäus der längste Tag bzw. $14^1/_4$, $14^1/_2$ und $14^3/_5$ Stunden währte?

Man findet a) für Tyrus: $\varphi = 33^0 28'$ $[33^0 12']$
b) für Syracus: $\varphi = 36^0 1'$ $[37^0 4']$
c) für Athen: $\varphi = 37^0 3'$ $[37^0 58']$

Die wahren Breiten sind in den eckigen Klammern jeweils zum Vergleich hinzugefügt.

Nehmen wir den damaligen Wert von ε als richtig an, so waren Ptolemäus die Tageslängen der zwei letzten Orte offenbar als zu kurz, diejenige von Tyrus als zu lang gemeldet.

Frage: Gibt es noch andere Methoden, um ohne jedwedes instrumentelle Hilfsmittel die Polhöhe finden zu können?

Solche sind: die Beobachtung der Dauer des Auf- und Untergangs eines scheibenförmigen Himmelskörpers (z. B. der Sonne) oder die Beobachtung zweier gleichzeitig untergehenden bekannten Fixsterne. Dies führt zu den Aufgaben (II) und (III).

2. Aufgabe. Aus der Dauer des Auf- oder Untergangs eines scheibenförmigen Himmelskörpers die geographische Breite des Beobachtungsortes zu finden.

Die Aufgabe wird zum erstenmal erwähnt in Maupertuis' Astronomie nautique (1745), freilich ohne Hinweis auf ihre praktische Brauchbarkeit, die erst in höheren Breiten eintreten kann, wo der Sonnenauf- und untergang beträchtlich lange dauert.

Bezeichnen wir mit ϱ den sphärischen Scheibenradius (in Bogenmaß), mit s_1 und s_2 die Stundenwinkel bei Beginn, resp. Ende des Untergangs, so ist $s_2 - s_1$ in Zeitmaß verwandelt, die Dauer dieses Phänomens. Aus Dreieck $PZ\Sigma_2$ der Fig. 2 hat man:

$$-\sin\varrho = \sin\delta \cdot \sin\varphi + \cos\delta \cdot \cos\varphi \cdot \cos s_2,$$

und aus Dreieck $PZ\Sigma_1$:

$$\sin\varrho = \sin\delta \cdot \sin\varphi + \cos\delta \cdot \cos\varphi \cdot \cos s_1,$$

wo Σ_1 und Σ_2 die Sonnenmittelpunkte zu Anfang und Ende des Untergangs bezeichnen.

Die Auflösung nach den Stundenwinkeln gibt

$$\cos s_1 = \frac{\sin\varrho - \sin\delta \cdot \sin\varphi}{\cos\delta \cdot \cos\varphi} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (I)$$

$$\cos s_2 = -\frac{\sin\varrho + \sin\delta \cdot \sin\varphi}{\cos\delta \cdot \cos\varphi} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (II)$$

Durch Addition und Subtraktion von (I) und (II) folgt weiter

$$(\cos s_2 + \cos s_1) \cdot \cos\delta \cdot \cos\varphi = -2\sin\delta \cdot \sin\varphi$$

$$(\cos s_2 - \cos s_1) \cdot \cos\delta \cdot \cos\varphi = -2\sin\varrho$$

Geht man zu den halben Winkeln über, so entstehen die Gleichungen:

$$\cos\frac{s_1+s_2}{2} \cdot \cos\frac{s_2-s_1}{2} = -\frac{\sin\delta \cdot \sin\varphi}{\cos\delta \cdot \cos\varphi} \quad \ldots\ldots \text{(III)}$$

$$\sin\frac{s_1+s_2}{2} \cdot \sin\frac{s_2-s_1}{2} = \frac{\sin\varrho}{\cos\delta \cdot \cos\varphi} \quad \ldots\ldots \text{(IV)}$$

Nun wird man am besten die Unbekannte $\frac{s_1+s_2}{2}$ wegschaffen und dann φ isolieren. Dies geschieht durch Quadrieren und Addieren von (III) und (IV), wodurch folgt:

$$\frac{\sin^2\delta \cdot \sin^2\varphi}{\cos^2\delta \cdot \cos^2\varphi \cdot \cos^2\frac{s_2-s_1}{2}} + \frac{\sin^2\varrho}{\cos^2\delta \cdot \cos^2\varphi \cdot \sin^2\frac{s_2-s_1}{2}} = 1,$$

$$\operatorname{tang}^2\varphi \cdot \frac{\operatorname{tang}^2\delta}{\cos^2\frac{s_2-s_1}{2}} + \frac{\sin^2\varrho}{\cos^2\delta \cdot \sin^2\frac{s_2-s_1}{2}}(1+\operatorname{tang}^2\varphi) = 1,$$

$$\operatorname{tang}^2\varphi\left[\frac{\operatorname{tang}^2\delta}{\cos^2\frac{s_2-s_1}{2}} + \frac{\sin^2\varrho}{\cos^2\delta \cdot \sin^2\frac{s_2-s_1}{2}}\right] = 1 - \frac{\sin^2\varrho}{\cos^2\delta \cdot \sin^2\frac{s_2-s_1}{2}},$$

$$\operatorname{tang}\varphi = \pm\sqrt{\frac{\cos^2\delta \cdot \sin^2\frac{s_2-s_1}{2} - \sin^2\varrho}{\sin^2\delta \cdot \operatorname{tang}^2\frac{s_2-s_1}{2} + \sin^2\varrho}} \quad \ldots\ldots \text{(V)}$$

Beobachtet man zur Zeit der Äquinoktien, so ist $\delta = o$, und (V) vereinfacht sich zu

$$\operatorname{tang}\varphi = \pm\frac{\sqrt{\sin^2\frac{s_2-s_1}{2} - \sin^2\varrho}}{\sin\varrho}$$

oder auch zu

$$\cos(\pm\varphi) = \frac{\sin\varrho}{\sin\frac{s_2-s_1}{2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(VI)}$$

Zahlenbeispiel: Unter welcher Breite φ währt das Phänomen des Sonnenauf oder -untergangs an einem Äquinoktialtage eine volle halbe Stunde?

Mit $\varrho = 15'\,30''$ und $\frac{1}{2}(s_2 - s_1) = 3^0 45'$ findet sich $\varphi = 86^0 3'$.

3. Aufgabe. Aus dem gleichzeitigen Untergang zweier bekannten Sterne die Polhöhe des Beobachtungsortes zu ermitteln.

Diese merkwürdige Aufgabe ist zuerst von J. B. Riccioli in seinem Almagestum novum, Bononiae, 1651, pars posterior, pag. 651 behandelt worden.

Zu praktischer Verwendung erweitert findet sich dieselbe in der Sammlung von 574 algebraischen, geometrischen und astronomischen Aufgaben des „Arithmetikers von Buxtehude“ Paul Halcke („Deliciae mathematicae oder mathematisches Sinnenkonfekt“, Hamburg 1719.) Seien S_1 und S_2 die zwei Sterne mit den bekannten Deklinationen δ_1 und δ_2 und den halben Tagbogen s_1 und s_2, so hat man, analog wie in Aufgabe I:

$$\cos s_1 = \pm \operatorname{tang}\varphi \cdot \operatorname{tang}\delta_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (I)$$

$$\cos s_2 = \pm \operatorname{tang}\varphi \cdot \operatorname{tang}\delta_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (II)$$

Durch Addition und Subtraktion von (I) und (II) und Anwendung der prosthaphäretischen Regeln linker Hand ergibt sich

$$2\cos\frac{s_1+s_2}{2}\cdot\cos\frac{s_1-s_2}{2} = \pm\operatorname{tang}\varphi\cdot\frac{\sin(\delta_1+\delta_2)}{\cos\delta_1\cdot\cos\delta_2} \quad . \quad . \quad . \quad (III)$$

$$-2\cdot\sin\frac{s_1+s_2}{2}\cdot\sin\frac{s_1-s_2}{2} = \pm\operatorname{tang}\varphi\cdot\frac{\sin(\delta_1-\delta_2)}{\cos\delta_1\cdot\cos\delta_2} \quad . \quad . \quad . \quad (IV)$$

Wir isolieren aus (III) und (IV) $\sin\frac{s_1+s_2}{2}$ und $\cos\frac{s_1+s_2}{2}$, quadrieren, addieren und finden

$$1 = \frac{\operatorname{tang}^2\varphi}{4\cdot\cos^2\delta_1\cdot\cos^2\delta_2}\cdot\left[\frac{\sin^2(\delta_1+\delta_2)}{\cos^2\frac{s_1-s_2}{2}} + \frac{\sin^2(\delta_1-\delta_2)}{\sin^2\frac{s_1-s_2}{2}}\right],$$

woraus sofort folgt

$$\operatorname{tang}\varphi = \pm\frac{2\cos\delta_1\cdot\cos\delta_2}{\sqrt{\frac{\sin^2(\delta_1+\delta_2)}{\cos^2\frac{s_1-s_2}{2}} + \frac{\sin^2(\delta_1-\delta_2)}{\sin^2\frac{s_1-s_2}{2}}}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (V)$$

4. Aufgabe. Man habe die Zeiten des Auf- oder Untergangs einer Anzahl bekannter Sterne bestimmt. Welches ist die geographische Breite des Beobachtungsortes?

Wir machen die willkürliche Annahme, daß die Deklinationen aller beobachteten Sterne negativ sind. Dann ist nach Formel (III) der 1. Aufgabe:

$$\left.\begin{aligned}\cos s_1 &= \operatorname{tang}\varphi\cdot\operatorname{tang}\delta_1\\ \cos s_2 &= \operatorname{tang}\varphi\cdot\operatorname{tang}\delta_2\\ &\vdots\\ \cos s_n &= \operatorname{tang}\varphi\cdot\operatorname{tang}\delta_n\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (I)$$

Aus diesen n-Gleichungen, also aus einer überbestimmten Aufgabe, gilt es, die Unbekannte $\operatorname{tang}\varphi$ zu errechnen. Im allgemeinen wird jede Gleichung, da die Beobachtungen ja nie ganz fehlerfrei sind, ein etwas anderes Resultat für die Polhöhe φ geben. Denken wir uns daher den wahren Wert von φ in jede der obigen Gleichungen eingesetzt, so wird wohl keine derselben genau befriedigt sein, vielmehr wird regelmäßig ein Fehler sich herausstellen. Diese Fehler haben die folgenden Werte:

$$\left.\begin{aligned} F_1 &= \operatorname{tang}\varphi \cdot \operatorname{tang}\delta_1 - \cos s_1 \\ F_2 &= \operatorname{tang}\varphi \cdot \operatorname{tang}\delta_2 - \cos s_2 \\ &\vdots \\ F_n &= \operatorname{tang}\varphi \cdot \operatorname{tang}\delta_n - \cos s_n \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad \text{(II)}$$

Wenn man nun wüßte, daß diese Fehler F sämtlich gleiche Vorzeichen hätten, so würde man einfach suchen, ihr arithmetisches Mittel

$$\frac{1}{n} \cdot (F_1 + F_2 + \ldots F_n)$$

so klein als möglich zu machen. Da jedoch positive und negative Fehler gleichmäßig zu erwarten sind, so erheben wir, um bloß positive Fehler zu erzielen, jedes F ins Quadrat und setzen:

$$f_{(\varphi)} = F_1^2 + F_2^2 + \ldots F_n^2 = (\operatorname{tang}\varphi \cdot \operatorname{tang}\delta_1 - \cos s_1)^2 + (\operatorname{tang}\varphi \cdot \operatorname{tang}\delta_2 - \cos s_2)^2 + \ldots (\operatorname{tang}\varphi \cdot \operatorname{tang}\delta_n - \cos s_n)^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(III)}$$

Damit (III) ein Minimum werde, muß $\frac{df_{(\varphi)}}{d\varphi} = 0$ sein. Das gibt

$$(\operatorname{tang}\varphi \cdot \operatorname{tang}\delta_1 - \cos s_1) \cdot \frac{\operatorname{tang}\delta_1}{\cos^2\varphi} + (\operatorname{tang}\varphi \cdot \operatorname{tang}\delta_2 - \cos s_2) \cdot \frac{\operatorname{tang}\delta_2}{\cos^2\varphi} + \ldots (\operatorname{tang}\varphi \cdot \operatorname{tang}\delta_n - \cos s_n) \cdot \frac{\operatorname{tang}\delta_n}{\cos^2\varphi} = 0,$$

woraus folgt:

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{\cos s_1 \cdot \operatorname{tang}\delta_1 + \cos s_2 \cdot \operatorname{tang}\delta_2 + \ldots \cos s_n \cdot \operatorname{tang}\delta_n}{\operatorname{tang}^2\delta_1 + \operatorname{tang}^2\delta_2 + \ldots \operatorname{tang}^2\delta_n} = \frac{\sum_1^n \cos s_n \cdot \operatorname{tang}\delta_n}{\sum_1^n \operatorname{tang}^2\delta_n} \quad \text{(IV)}$$

Das hier befolgte Verfahren ist bekannt unter dem Namen „Methode der kleinsten Quadrate“, über welchen mathematischen Lehrbegriff eine große Literatur existiert. Wir nennen: Gauß: Theoria combinationis observationum erroribus minimis obnoxiae, Göttingen 1821—26; Gerling: Die Ausgleichungsrechnungen der praktischen Geometrie, Hamburg 1843; W. Weitbrecht: Ausgleichsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate, Leipzig, Sammlung Göschen.

Natürlich tritt bei Gestirnen mit positiver Deklination an Stelle von $F = \operatorname{tang}\varphi \cdot \operatorname{tang}\delta - \cos s$, die Gleichung: $F = \operatorname{tang}\varphi \cdot \operatorname{tang}\delta + \cos s$, so daß es sich in diesem Falle bloß um eine Änderung des Vorzeichens handelt.

Nach G. Müller: Die Photometrie der Gestirne, Leipzig 1897, hat ein Stern in der Nähe des Horizontes bereits mehr als 95% derjenigen Lichtstärke verloren, die er im Zenit besitzen würde, so daß er bei seinem Untergang um mehrere Größenklassen geschwächt ist. (Vgl. Müller a. a. O. pag. 110, Von der Extinktion des Lichtes in der Erdatmosphäre.)

5. Aufgabe. Man kennt die Deklinationen zweier Sterne δ_1 und δ_2, desgleichen die Zeiten, wo sie gleiche, aber unbekannte Höhen erreichen; hieraus die Breite φ des Beobachtungsortes zu bestimmen.

Im allgemeinen ist es wegen der Refraktion oder Strahlenbrechung nicht sehr vorteilhaft, zur Ermittelung sphärischer Größen Höhenbeobachtungen einzuführen, da durch die Refraktion bekanntlich alle Gestirnshöhen vergrößert, also alle Zenitdistanzen verringert werden. Hier heben sich aber die Höhen, welches auch ihre Entstellung durch die Refraktion sei, vollständig aus der Rechnung fort, weshalb diese Methode der Polhöhenbestimmung sehr brauchbar ist.

Wie ersichtlich, ist Aufgabe (II) ein Spezialfall von dieser, indem dort die Höhen $= 0$ sind. Hier hat man

$$\sin h = \sin\delta_1 \cdot \sin\varphi + \cos\delta_1 \cdot \cos\varphi \cdot \cos s_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(I)}$$

$$\sin h = \sin\delta_2 \cdot \sin\varphi + \cos\delta_2 \cdot \cos\varphi \cdot \cos s_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(II)}$$

Wir subtrahieren (II) von (I) und finden unter Anwendung der Prosthaphäresis:

$$0 = 2\sin\varphi \cdot \sin\frac{\delta_1 - \delta_2}{2} \cdot \cos\frac{\delta_1 + \delta_2}{2} + \cos\varphi\,(\cos\delta_1 \cdot \cos s_1 - \cos\delta_2 \cdot \cos s_2) \quad \text{(III)}$$

Jetzt setzen wir

$$\delta_1 = \frac{\delta_1 + \delta_2}{2} + \frac{\delta_1 - \delta_2}{2}; \qquad \delta_2 = \frac{\delta_1 + \delta_2}{2} - \frac{\delta_1 - \delta_2}{2}$$

und entwickeln $\cos\delta_1$ und $\cos\delta_2$. Damit geht (III) über in

$$0 = 2 \cdot \sin\varphi \cdot \sin\frac{\delta_1 - \delta_2}{2} \cdot \cos\frac{\delta_1 + \delta_2}{2} + \cos\varphi \left[\cos s_1 \left(\cos\frac{\delta_1 + \delta_2}{2} \cdot \cos\frac{\delta_1 - \delta_2}{2}\right.\right.$$

$$\left.\left. - \sin\frac{\delta_1 + \delta_2}{2} \cdot \sin\frac{\delta_1 - \delta_2}{2}\right) - \cos s_2 \left(\cos\frac{\delta_1 + \delta_2}{2} \cdot \cos\frac{\delta_1 - \delta_2}{2} + \sin\frac{\delta_1 + \delta_2}{2} \cdot \sin\frac{\delta_1 - \delta_2}{2}\right)\right]$$

oder vereinfacht:

$$0 = 2 \cdot \sin\varphi \cdot \sin\frac{\delta_1 - \delta_2}{2} \cdot \cos\frac{\delta_1 + \delta_2}{2} + \cos\varphi \left[\cos\frac{\delta_1 + \delta_2}{2} \cdot \cos\frac{\delta_1 - \delta_2}{2} (\cos s_1 - \cos s_2)\right.$$

$$\left. - \sin\frac{\delta_1 + \delta_2}{2} \cdot \sin\frac{\delta_1 - \delta_2}{2} (\cos s_1 + \cos s_2)\right]$$

Um diese Gleichung noch weiter zusammenziehen zu können, schreiben wir $s_2 = s_1 + \Delta s$, entwickeln $\cos s_1 + \cos s_2$ und $\cos s_1 + \cos s_2$ nach den prosthaphäretischen Regeln und finden:

$$0 = \sin\varphi \cdot \sin\frac{\delta_1 - \delta_2}{2} \cdot \cos\frac{\delta_1 + \delta_2}{2} + \cos\varphi \left[\cos\frac{\delta_1 + \delta_2}{2} \cdot \cos\frac{\delta_1 - \delta_2}{2} \cdot \sin\left(s_1 + \frac{\Delta s}{2}\right) \cdot \sin\frac{\Delta s}{2}\right.$$

$$\left. - \sin\frac{\delta_1 + \delta_2}{2} \cdot \sin\frac{\delta_1 - \delta_2}{2} \cdot \cos\left(s_1 + \frac{\Delta s}{2}\right) \cdot \cos\frac{\Delta s}{2}\right]$$

oder

$$\operatorname{tang}\varphi = -\sin\frac{\Delta s}{2} \cdot \sin\left(s_1 + \frac{\Delta s}{2}\right) \cdot \operatorname{cotg}\frac{\delta_1 - \delta_2}{2} + \cos\frac{\Delta s}{2} \cdot \cos\left(s_1 + \frac{\Delta s}{2}\right) \cdot \operatorname{tang}\frac{\delta_1 + \delta_2}{2} \quad \text{(IV)}$$

Führt man in (IV) noch die folgenden Hilfsgrößen ein:

$$\sin\frac{\Delta s}{2}\cdot\operatorname{cotg}\frac{\delta_1-\delta_2}{2}=A\cdot\sin\beta$$

$$\cos\frac{\Delta s}{2}\cdot\operatorname{tang}\frac{\delta_1+\delta_2}{2}=A\cdot\cos\beta$$

$$\beta+\frac{\Delta s}{2}=\gamma,$$

so wird endlich

$$\operatorname{tang}\varphi=A\cdot\cos(\gamma+s_1)$$

6. Aufgabe. Man hat zwei Höhen h_1 und h_2 eines Sterns (Sonne) mit bekannter Deklination δ gemessen; außerdem ist die Zwischenzeit der Beobachtungen gegeben; gesucht ist die Polhöhe φ des Beobachtungsortes.

Die vorstehende Aufgabe ist bekannt als die Douwessche. Sie hat eine nicht uninteressante Geschichte, aus der die wichtigsten Daten hier gegeben werden sollen. Die Problemstellung scheint bis auf den portugiesischen Astronomen Nunez (1542) zurückzugehen, um dann von Maupertuis in seiner schon erwähnten Astronomie nautique genauer formuliert zu werden. Die praktische Verwendung in der Nautik erfolgte durch den Niederländer Douwes, der durch seine 1761 herausgegebenen „Zeemans-Tafelen“ eine bequemere Handhabung für den Seegebrauch ermöglichte, da die Schlußgleichung sehr verwickelt und vom 2. Grade ist. Zur See sucht man deren Auflösung in der Regel durch Näherung zu bewirken, da man ja den Ort des Schiffes annähernd kennt. Auch Hilfswinkel spielen bei Behandlung des Problems eine Rolle. Den ausführlichsten Bericht über alle bisher bekannten Lösungen hat Weyer in den „Annalen' der Hydrographie und maritimen Meteorologie“, Jahrg. 1883—1885 gegeben unter der Überschrift: „Die direkten und indirekten Lösungen des Zweihöhenproblems.“ Der Literatur nicht kundige Bearbeiter bringen nicht selten heute noch neue Methoden zu Markte, die sich bei näherem Zusehen als längst dagewesen erweisen, ein Fall, der auch in der Geschichte der Trigonometrie öfters vorkommt. Strenge Lösungen in geschlossenen Ausdrücken gaben z. B. G. W. und W. L. Krafft (Nova Acta Petropoli ad. A. 1791, 1795, 1805), mit denen im wesentlichen diejenige von Matern (Ann. d. Hydrogr. usw. 1883) übereinstimmt, ferner S. Klügel im Berliner astronomischen Jahrbuch, 1798, Mollweide in von Zachs „Monatliche Korrespondenz zur Beförderung der Erd- und Himmelskunde“ 1809, Ivory im Philosophical Magazine (1821 und 1822), Encke im Berliner astronomischen Jahrbuch 1859 („Über eine Erweiterung der Douwesschen Aufgabe“), Heyenga („Neue Methode zur Erleichterung der Bestimmung des Schiffsortes“, Hamburg, 1882) u. a.

Auch für die Ermittelung der Breite in der Nähe der Erdpole kann man von der Douwesschen Aufgabe ausgehen, wie dies C. V. L. Charlier tat („Über geographische Ortsbestimmungen in der Nähe des Poles“, Astronom. Nachrichten, 1910, S. 1—4) dessen Lösung in der folgenden Aufgabe wiedergegeben ist.

A. Wedemeyer hat ein Instrument konstruiert, das unter Benutzung des Satzes: Peripheriewinkel über gleichen Bogen sind gleich, eine graphische Lösung der Douwesschen Aufgabe mit Leichtigkeit gestattet. Die Theorie desselben hat Wedemeyer in den Annalen der Hydrogr. usw., 1911, S. 494 entwickelt. Das Versuchsmodell ist in der Zeitschrift für Motorluftschiffahrt und Flugtechnik im Januarheft 1912 beschrieben und abgebildet. Das Instrument ist jetzt als Präzisionsinstrument vom R—M—A gebaut und wird von Goerz in Friedenau-Berlin hergestellt.

Rein geometrische und stereometrische Lösungen der vorstehenden Aufgabe hat der Verfasser gegeben in den Annalen der Hydrogr. 1908, S. 558, in „Aus dem Archiv der Deutschen Seewarte“ (1910, S. 5) und in seinen „Beiträge zur konstruktiven Lösung sphärisch-astronomischer Aufgaben“ (1910, Leipzig).

Wir geben nachstehend zwei Auflösungen in geschlossenen Ausdrücken:

1. Die Lösung von Matern: Bekannt sind h_1, h_2, δ, sowie die Zwischenzeit der Beobachtungen (in Stundenwinkelmaß $= s_2 - s_1$); gesucht ist φ. Schreibt man zweimal für das Zenit-Pol-Sterndreieck den Kosinussatz an, so hat man

$$\sin h_1 = \sin\delta \cdot \sin\varphi + \cos\delta \cdot \cos\varphi \cdot \cos s_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(I)}$$

$$\sin h_2 = \sin\delta \cdot \sin\varphi + \cos\delta \cdot \cos\varphi \cdot \cos s_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(II)}$$

Wir subtrahieren zuerst (II) von (I), addieren hierauf (II) zu (I) und finden

$$\sin\frac{h_1 - h_2}{2} \cdot \cos\frac{h_1 + h_2}{2} = \cos\delta \cdot \cos\varphi \cdot \sin\frac{s_2 - s_1}{2} \cdot \sin\frac{s_2 + s_1}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(III)}$$

$$\sin\frac{h_1 + h_2}{2} \cdot \cos\frac{h_1 - h_2}{2} = \sin\delta \cdot \sin\varphi + \cos\delta \cdot \cos\varphi \cdot \cos\frac{s_1 - s_2}{2} \cdot \cos\frac{s_1 + s_2}{2} \quad \text{(IV)}$$

In (III) und (IV) sind nur noch die zwei Unbekannten $\frac{s_1 + s_2}{2} = x$ und φ vorhanden. Man isoliere $\sin x$ und $\cos x$, so daß man erhält:

$$\sin x = \frac{\sin\frac{h_1 - h_2}{2} \cdot \cos\frac{h_1 + h_2}{2}}{\cos\varphi \cdot \cos\delta \cdot \sin\frac{s_2 - s_1}{2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(V)}$$

$$\cos x = \frac{\sin\frac{h_1 + h_2}{2} \cdot \cos\frac{h_1 - h_2}{2} - \sin\delta \cdot \sin\varphi}{\cos\delta \cdot \cos\varphi \cdot \cos\frac{s_1 - s_2}{2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(VI)}$$

Nunmehr quadriere man (V) und (VI), addiere sie und schaffe $\cos^2\varphi$ auf die linke Seite. Dies führt zu

$$\cos^2\varphi = \left[\frac{\sin\frac{h_1 - h_2}{2} \cdot \cos\frac{h_1 + h_2}{2}}{\cos\delta \cdot \sin\frac{s_2 - s_1}{2}}\right]^2 + \left[\frac{\sin\frac{h_1 + h_2}{2} \cdot \cos\frac{h_1 - h_2}{2}}{\cos\delta \cdot \cos\frac{s_2 - s_1}{2}} - \frac{\sin\delta}{\cos\delta \cdot \cos\frac{s_2 - s_1}{2}} \cdot \sin\varphi\right]^2 \quad \text{(VII)}$$

In (VII) setze man zur Abkürzung:

$$\frac{\sin\frac{h_1-h_2}{2}\cdot\cos\frac{h_1+h_2}{2}}{\cos\delta\cdot\sin\frac{s_2-s_1}{2}}=a;\qquad \frac{\sin\frac{h_1+h_2}{2}\cdot\cos\frac{h_1-h_2}{2}}{\cos\delta\cdot\cos\frac{s_2-s_1}{2}}=b;\qquad \frac{\sin\delta}{\cos\delta\cdot\cos\frac{s_2-s_1}{2}}=c,$$

so kann die quadratische Gleichung (VII) auch so geschrieben werden

$$\sin^2\varphi-\frac{2bc}{1+c^2}\cdot\sin\varphi=\frac{1-a^2-b^2}{1+c^2},$$

deren Auflösung ergibt:

$$\sin\varphi=\frac{1}{1+c^2}\left[bc\pm\sqrt{(1-a^2)(1+c^2)-b^2}\right]\cdot\ \ .\ \ .\ \ .\ \ \text{(VIII)}$$

Nur wenn $1-a^2>0$ ist, liefert (VIII) reelle Werte, wir dürfen folglich $a=\sin\psi_1$ setzen, außerdem sei $c=\operatorname{cotg}\psi_2$, womit (VIII) übergeht in

$$\sin\varphi=\sin\psi_2\cdot\left[b\cdot\operatorname{cotg}\psi_2\pm\cos\psi_1\cdot\sqrt{1-\left(\frac{b\cdot\sin\psi_2}{\cos\psi_1}\right)^2}\right]\ \ .\ \ \text{(IX)}$$

Den in der runden Klammer stehenden Bruch dürfen wir, da er für reelle Werte von $\sin\varphi$ wiederum <1 sein muß, einem Kosinus gleichsetzen. Er heiße $\cos\psi_3$, so daß also

$$b=\frac{\cos\psi_1\cdot\cos\psi_3}{\sin\psi_2}\quad\text{ist.}$$

Diese Substitution in (IX) eingeführt, läßt unsere Schlußgleichung übergehen in

$$\begin{aligned}\sin\varphi&=\cos\psi_1\cdot\cos\psi_2\cdot\cos\psi_3\pm\cos\psi_1\cdot\sin\psi_2\cdot\sin\psi_3\\&=\cos\psi_1\cdot\cos(\psi_2\mp\psi_3)\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ \text{(X)}\end{aligned}$$

Der Gang der Rechnung ist also dieser: Erst bestimme man ψ_1 und ψ_2 aus

$$\sin\psi_1=\frac{\sin\frac{h_1-h_2}{2}\cdot\cos\frac{h_1+h_2}{2}}{\cos\delta\cdot\sin\frac{s_2-s_1}{2}}$$

und

$$\operatorname{cotg}\psi_2=\frac{\operatorname{tang}\delta}{\cos\frac{s_2-s_1}{2}}$$

Dann wird

$$\cos\psi_3=\frac{\cos\frac{h_2-h_1}{2}\cdot\cos\frac{h_1+h_2}{2}}{\sin\delta}\cdot\frac{\cos\psi_2}{\cos\psi_1},$$

worauf φ nach (X) in einfacher Weise gefunden werden kann. Es sind im ganzen 13 Logarithmen aufzuschlagen.

2. Die Lösung von G. W. Krafft (Essai de perfectionner une méthode de trouver sur mer la latitude géographique du vaisseau, a. a. O. pag. 352—62).

Um mit einem Schlage die Endformel in $\sin\varphi$ anschreiben zu können, werden folgende Hilfslinien gezogen (Fig. 3). Die Mitte des Großkreisbogens, der durch die zwei Sternörter S_1 und S_2 geht, und dessen Gradzahl $= 2a$ ist, wird wiederum durch Bogen größter Kreise mit dem Zenit und Pol verbunden und sodann auf letztere Verbindungslinie das Lot ZF gefällt, welches von $MP = b$ [1]) das Stück d abschneidet. Der sphärische Winkel PMZ sei mit g bezeichnet, MZ mit f. Dann findet man $MS_1 = MS_2 = a$ aus

$$\sin a = \cos\delta \cdot \sin\frac{s_2 - s_1}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (I)$$

und ebenso b aus dem bei M rechtwinkligen Dreieck MS_2P:

$$\cos b = \sin\delta \cdot \sec a \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (II)$$

Für die gesuchte Breite φ liest man aus dem Dreieck PMZ ab

$$\cos(90^0 - \varphi) = \sin\varphi = \cos f \cdot \cos b + \sin f \cdot \sin b \cdot \cos g \quad \ldots \quad (III)$$

Wendet man auf die Seiten $90^0 - h_1$ und $90^0 - h_2$ den Kosinussatz an, so ist

$$\sin h_1 = \cos a \cdot \cos f + \sin a \cdot \sin f \cdot \cos(\sphericalangle S_1 MZ),$$
$$\sin h_2 = \cos a \cdot \cos f - \sin a \cdot \sin f \cdot \cos(\sphericalangle S_2 MZ),$$

woraus sich durch Addition ergibt

$$\cos f = \frac{\sin h_1 + \sin h_2}{2\cos a} = \frac{\sin\frac{h_1 + h_2}{2} \cdot \cos\frac{h_1 - h_2}{2}}{\cos a} \quad \ldots \quad (IV)$$

und ebenso durch Anwendung des Sinussatzes:

$$\sin f = \frac{\sin h_1 - \sin h_2}{2\sin a \cdot \sin g} = \frac{\sin\frac{h_1 - h_2}{2} \cdot \cos\frac{h_1 + h_2}{2}}{\sin a \cdot \sin g} \quad \ldots \quad (V)$$

Ersetzt man noch nach (II) $\sin b$ durch $\pm\frac{\sqrt{\cos^2 a - \sin^2\delta}}{\cos a}$, so wird (III) sofort

$$\sin\varphi = \frac{\sin\delta \cdot \sin\frac{h_1+h_2}{2} \cdot \cos\frac{h_1-h_2}{2}}{\cos^2 a} \pm \frac{\cos\frac{h_1+h_2}{2} \cdot \sin\frac{h_1-h_2}{2}}{\sin a \cdot \cos a} \cdot \cot g \cdot \sqrt{\cos^2 a - \sin^2\delta} \quad (VI)$$

Da man aus (IV) f kennt, so läßt sich nach (V) auch g logarithmisch berechnen, und der Ausdruck unter dem Radikal in (VI) kann auch so geschrieben werden:

$$\cos^2 a - \sin^2\delta = \cos(a + \delta) \cdot \cos(a - \delta)$$

Zahlenbeispiele:

1. Mit $\delta = 20^0\,41'$; $h_1 = 68^0\,30'$; $h_2 = 71^0\,9'$

und der Zwischenzeit $t_2 - t_1 = 0^h\,56^m\,13^s$ findet sich

$$\varphi_1 = 39^0\,27'\,55''\ \text{n. Br.}$$
$$\varphi_2 = 2^0\,4'\,2''\ \text{n. Br.}$$

[1]) $MP = b$ ist nicht $= PS_1 = PS_2$, da S_1S_2 kein Parallel, sondern ein Großkreisbogen.

2. Mit $\delta = 20^0\,0'\,0''$; $h_1 = 17^0\,13'$; $h_2 = 19^0\,41'$ und $t_2 - t_1 = 1^h\,0^m\,0^s$ findet man

$$\varphi_1 = 50^0\,0'\,4'' \text{ n. Br.}$$
$$\varphi_2 = 80^0\,19'\,53'' \text{ s. Br.}$$

7. Aufgabe. Wie gestaltet sich die Lösung der Douwesschen Aufgabe, falls φ nahe 90^0 ist?

Wiederum hat man

$$\sin h_1 = \sin\delta \cdot \sin\varphi + \cos\delta \cdot \cos\varphi \cdot \cos s_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (I)$$
$$\sin h_2 = \sin\delta \cdot \sin\varphi + \cos\delta \cdot \cos\varphi \cdot \cos(s_1 + \Delta s) \quad . \quad . \quad (II)$$

Nun werden (nach Charlier) die Hilfsveränderlichen

$$x = \cos\varphi \cdot \cos s_1; \quad y = \cos\varphi \cdot \sin s_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (III)$$

eingeführt; dann sind, da $\cos\varphi$ nahe Null ist, x und y kleine Größen. Aus (III) folgt:

$$\sin^2 s_1 + \cos^2 s_1 = 1 = \frac{x^2 + y^2}{\cos^2\varphi},$$

$$\left.\begin{aligned} \cos^2\varphi &= x^2 + y^2, \\ \sin\varphi &= \sqrt{1 - x^2 - y^2} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (IIIa)$$

Damit wird aus (I) und (II)

$$\sin h_1 = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \cdot \sin\delta + x \cdot \cos\delta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (IV)$$
$$\sin h_2 = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \cdot \sin\delta + \cos\delta\,(x\cos\Delta s - y\sin\Delta s) \quad (V)$$

Für eine erste Annäherung ist es gestattet, in (IV) und (V) die quadratischen Glieder von x und y zu vernachlässigen und zu schreiben

$$\sin h_1 = \sin\delta + x \cdot \cos\delta,$$
$$\sin h_2 = \sin\delta + \cos\delta\,(x\cos\Delta s - y\sin\Delta s),$$

woraus folgt:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{\sin h_1 - \sin\delta}{\cos\delta} \\ y &= \frac{\sin h_1 - \sin h_2 - \sin^2\frac{\Delta s}{2}(\sin h_1 - \sin\delta)}{2\cos\delta \cdot \sin\Delta s} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (VI)$$

Hat man so x und y ermittelt, so findet man nach (III)

$$\operatorname{tang} s_1 = \frac{y}{x},$$

und nach (IIIa):

$$\cos\varphi = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Die Bestimmung des Meridians in der Polnähe ist schwierig; ebenso dürften die Höhenmessungen bei dem niedrigen Sonnenstande und der wegen der kalten Polarluft anormalen Strahlenbrechung keine einwandfreien Resultate geben. Vgl. über nähere Details: A. Wedemeyer: „Ortsbestimmung im Polargebiet“ (Ann. d. Hydrogr. 1910, S. 285ff.), die lichtvollen Ausführungen

bei H. Martus: „Astronomische Erdkunde“, Große Ausgabe, 4. Aufl. 1912 S. 276ff., endlich C. Schoy: „Näherungsweise Bestimmung der Polhöhe in sehr hohen Breiten“, (Peterm. Mitt. 1912, Novemberheft) und „Orientierung in der Nähe der Erdpole“, (Geographische Zeitschrift, 1913, Februarheft).

8. Aufgabe. In welcher Weise kann man der Änderung der Sonnendeklination Rechnung tragen, welche zwischen der ersten und zweiten Höhenbeobachtung statthat?

Es sei zu Beginn der ersten Messung (Fig. 4) $PS_1 = 90^0 - \delta$, bei der zweiten aber $PS_2 = 90^0 - \delta'$. Dann hat man nach dem Kosinussatz:

$$\cos D = \sin\delta \cdot \sin\delta' + \cos\delta \cdot \cos\delta' \cdot \cos(s_1 - s_2)$$

$$1 - 2\sin^2\frac{D}{2} = \sin\delta \cdot \sin\delta' + \cos\delta \cdot \cos\delta' \left(1 - 2\sin^2\frac{s_1 - s_2}{2}\right)$$

$$= \cos(\delta - \delta') - 2\cos\delta \cdot \cos\delta' \cdot \sin^2\frac{s_1 - s_2}{2}$$

Nun ist $\delta - \delta'$ nahe $= 0$, folglich

$$-2\sin^2\frac{D}{2} = -2\cos\delta \cdot \cos\delta' \cdot \sin^2\frac{s_1 - s_2}{2}$$

$$\sin\frac{D}{2} = \sin\frac{s_1 - s_2}{2} \cdot \sqrt{\cos\delta \cdot \cos\delta'} \quad \ldots\ldots \quad (I)$$

Ferner ist

$$\sin\delta' = \sin\delta \cdot \cos D + \cos\delta \cdot \sin D \cdot \cos v$$

$$= \sin(\delta + D) - 2\cos\delta \cdot \cos D \cdot \sin^2\frac{v}{2}$$

$$\sin^2\frac{v}{2} = \frac{\sin(\delta + D) - \sin\delta'}{2\cos\delta \cdot \sin D}$$

$$= \frac{\cos\frac{1}{2}(D + \delta + \delta') \cdot \sin\frac{1}{2}(D + \delta - \delta')}{\sin D \cdot \cos\delta} \quad \ldots \quad (II)$$

Ebenso findet man für das Dreieck $S_1 S_2 Z$:

$$\sin^2\frac{w}{2} = \frac{\cos\frac{1}{2}(D + h_1 + h_2) \cdot \sin\frac{1}{2}(D + h_1 - h_2)}{\sin D \cdot \cos\delta} \quad . \quad (III)$$

Mit der Kenntnis der Winkel v und w ist auch $u = w \pm v$ gegeben. Im rechtwinkligen Dreieck FZS_1 ist aber

$$\operatorname{tang} G = \cos u \cdot \operatorname{cotg} h_1 \quad \ldots \quad (IV)$$

und im Dreieck ZFP:

$$\cos(\delta + G) = \operatorname{cotg} s \cdot \operatorname{tang} FZ$$

$$= \operatorname{cotg} s \cdot \sin G \cdot \operatorname{tang} u,$$

wenn man noch das rechtwinklige Dreieck FZS_1 in Betracht zieht. Man erhält nun zur Berechnung von s:

$$\operatorname{tang} s = \frac{\operatorname{tang} u \cdot \sin G}{\cos(\delta + G)} \quad \ldots\ldots \quad (V)$$

und damit endlich

$$\operatorname{tang}\varphi = \cos s \cdot \operatorname{tang}(\delta + G) \quad \ldots\ldots \quad (VI)$$

Ein etwas anderes Verfahren, die Inkonstanz der Sonnendeklination zu berücksichtigen, rührt von A. Sawitsch her. (Abriß der praktischen Astronomie, Hamburg 1851, 2. Bd. pag. 259.)

9. Aufgabe. In welcher Weise kann man der Ortsveränderung des Schiffes während der Zwischenzeit der Beobachtungen Rechnung tragen?

Es ist jetzt allgemein üblich, an die erste gemessene Höhe diejenige Korrektion für die Zeitveränderung anzubringen, wodurch diese erste Höhe so verändert wird, wie sie am zweiten Beobachtungsort erschienen sein würde, wenn das Schiff schon dortselbst gewesen wäre.

Bekanntlich sind die Projektionen der Zenite auf die Karte identisch mit den Orten, denen sie angehören. Folglich ist $Z_1 Z_2 = R$ (Fig. 5) der vom Schiff zurückgelegte Weg (in Seemeilen) Q sei der Winkel zwischen dem Kurs des Schiffes und dem Azimut, in welchem man am zweiten Ort das Gestirn peilt. $\Delta = h_2 - h_1$ heißt die vollständige Korrektion. Sie ergibt sich für die Praxis genügend genau als Kathete eines geradlinigen Dreiecks, dessen Hypotenuse R die in der Zwischenzeit durchsegelte Distanz ist. Aus der Figur 5 liest man unmittelbar ab

$$90^0 - h_1 = 90^0 - h_2 - \Delta$$
$$h_1 = h_2 + \Delta$$
$$\Delta = R \cdot \cos Q$$
$$h_1 = h_2 + R \cdot \cos Q \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (I)$$

Eine genauere Formel, die auch die Glieder zweiter Ordnung noch berücksichtigt, ist

$$h_1 = h_2 + R \cdot \cos Q - \tfrac{1}{2} R^2 \sin^2 Q \cdot \operatorname{tang} h_2 \quad (II)$$

Sie findet sich bewiesen bei Delambre: Astronomie théorique et practique, Paris 1814, Tome III pag. 661, ebenso bei Brünnow: Lehrbuch der sphärischen Astronomie, Gütersloh 1880, pag. 302. Hier kann auf deren Herleitung nicht näher eingegangen werden.

10. Aufgabe. Aus drei außerhalb des Meridians gemessenen Höhen eines Gestirns und der Zwischenzeit der Beobachtungen die Polhöhe des Beobachtungsortes, die Deklination des Gestirns und die Zeit zu bestimmen.

1. Für diese eigenartige Aufgabe, die für die Praxis äußerst nützlich wäre, da man zur Berechnung der Beobachtungen durchaus keine fremden Data nötig hätte[1]), die aber wegen des großen Einflusses der Höhenfehler (Refraktion) auf das Resultat keine praktische Anwendung in der Zeit- und Ortsbestimmung finden kann, findet man eine sehr elegante Auflösung bei Brünnow a. a. O. S. 302, welche wir sofort vortragen wollen. Man verfügt über folgende drei Gleichungen:

[1]) Bei der Beobachtung ein und desselben Sterns kommen in Δs und $\Delta s'$ auch die Rektascensionen nicht vor.

$$\left.\begin{aligned} \sin h &= \sin\varphi \cdot \sin\delta + \cos\varphi \cdot \cos\delta \cdot \cos s \\ \sin h' &= \sin\varphi \cdot \sin\delta + \cos\varphi \cdot \cos\delta \cdot \cos(s + \Delta s) \\ \sin h'' &= \sin\varphi \cdot \sin\delta + \cos\varphi \cdot \cos\delta \cdot \cos(s + \Delta s + \Delta s'), \end{aligned}\right\} \quad . \; . \quad \text{(I)}$$

woraus man die drei Unbekannten φ, δ und s bestimmen kann. Setzt man zur Abkürzung

$$\left.\begin{aligned} x &= \cos\varphi \cdot \cos\delta \cdot \cos s \\ y &= \cos\varphi \cdot \cos\delta \cdot \sin s \\ z &= \sin\delta \cdot \sin\varphi, \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{(II)}$$

so werden die drei obigen Gleichungen zu

$$\begin{aligned} \sin h &= z + x \\ \sin h' &= z + x\cos\Delta s - y\sin\Delta s \\ \sin h'' &= z + x \cdot \cos(\Delta s + \Delta s') - y\sin(\Delta s + \Delta s'), \end{aligned}$$

woraus man die Unbekannten x, y und z durch einfache Elimination findet. Kennt man aber diese, so errechnen sich die gesuchten Größen s, δ und φ aus Gruppe II sehr leicht. Man hat

$$\begin{aligned} \operatorname{tang} s &= \frac{y}{x} \\ \sin\varphi \cdot \sin\delta &= z \\ \cos\varphi \cdot \cos\delta &= \sqrt{x^2 + y^2}. \end{aligned}$$

2. Eine andere Auflösung des Problems stammt von Mollweide her, die er in von Zachs schon in Aufgabe 6 erwähnten monatlichen Korrespondenz usw. gab (20. Bd. pag. 125ff.). Subtrahiert man die zweite und dritte Gleichung von der ersten, so erhält man

$$\begin{aligned} \sin h - \sin h' &= [\cos s - \cos(s + \Delta s)] \cdot \cos\delta \cdot \cos\varphi \\ \sin h - \sin h'' &= [\cos s - \cos(s + \Delta s + \Delta s')] \cdot \cos\delta \cdot \cos\varphi \end{aligned}$$

Hieraus folgt durch Division:

$$\frac{\sin h - \sin h'}{\sin h - \sin h''} = \frac{\cos s - \cos(s + \Delta s)}{\cos s - \cos(s + \Delta s + \Delta s')} = \frac{\sin\left(s + \frac{\Delta s}{2}\right) \cdot \sin\frac{\Delta s}{2}}{\sin\left(s + \frac{\Delta s + \Delta s'}{2}\right) \cdot \sin\frac{\Delta s + \Delta s'}{2}}$$

$$\frac{\sin\left(s + \frac{\Delta s}{2}\right)}{\sin\left(s + \frac{\Delta s + \Delta s'}{2}\right)} = \frac{(\sin h - \sin h') \cdot \sin\frac{\Delta s + \Delta s'}{2}}{(\sin h - \sin h'')\sin\frac{\Delta s}{2}} = \frac{\cos\frac{h + h'}{2} \cdot \sin\frac{h - h'}{2} \cdot \sin\frac{\Delta s + \Delta s'}{2}}{\cos\frac{h + h''}{2} \cdot \sin\frac{h - h''}{2} \cdot \sin\frac{\Delta s}{2}}$$

Jetzt nehme man den Hilfswinkel A so, daß

$$\frac{\sin\left(s + \frac{\Delta s}{2}\right)}{\sin\left(s + \frac{\Delta s + \Delta s'}{2}\right)} = \operatorname{tang}(45^0 - A) = \frac{1 - \operatorname{tang} A}{1 + \operatorname{tang} A} \quad \text{wird, also}$$

$$\operatorname{cotg} A = \frac{\sin\left(s + \frac{\Delta s + \Delta s'}{2}\right) + \sin\left(s + \frac{\Delta s}{2}\right)}{\sin\left(s + \frac{\Delta s + \Delta s'}{2}\right) - \sin\left(s + \frac{\Delta s}{2}\right)}$$

$$\operatorname{cotg} A = \operatorname{tang}\left(s + \frac{2\Delta s + \Delta s'}{4}\right) \cdot \operatorname{cotg} \frac{\Delta s'}{4},$$

mithin

$$\operatorname{tang}\left(s + \frac{2\Delta s + \Delta s'}{4}\right) = \operatorname{cotg} A \cdot \operatorname{tang} \frac{\Delta s'}{4}$$

ist. Hieraus erhält man also zunächst die unbekannte Zeit s in logarithmischer Form. Der weitere Verlauf der Lösung zur Auffindung von φ und δ ist bei Mollweide etwas umständlich und gekünstelt, bis er endlich zu logarithmisch brauchbaren Formeln kommt. Dieser Teil der Aufgabe tritt auch selbständig auf als

11. Aufgabe. Nach Verlauf der Zeiten s und s' (in Bogenmaß) von dem Augenblick der Kulmination an gerechnet, waren die entsprechenden Höhen der Sonne (oder eines Gestirns) $= h$ und h'; welches ist die Deklination der Sonne und die geographische Breite des Beobachtungsortes?

Man erhält aus den ersten Formeln der vorigen Aufgabe leicht:

$$\cos\varphi \cdot \cos\delta = \frac{\sin h - \sin h'}{\cos s - \cos s'} = \frac{\cos\frac{h+h'}{2} \cdot \sin\frac{h-h'}{2}}{\sin\frac{s+s'}{2} \cdot \sin\frac{s'-s}{2}} \quad \ldots \quad \text{(I)}$$

$$\sin\varphi \cdot \sin\delta = \sin h - \frac{\sin h - \sin h'}{\cos s - \cos s'} \cdot \cos s \quad \ldots\ldots \quad \text{(II)}$$

und daraus durch Addition und Subtraktion

$$\cos(\varphi - \delta) = -\frac{2 \cdot \cos\frac{h+h'}{2} \cdot \sin\frac{h-h'}{2} \cdot \sin^2\frac{s}{2}}{\sin\frac{s+s'}{2} \cdot \sin\frac{s-s'}{2}} + \sin h$$

$$\cos(\varphi + \delta) = -\frac{2 \cdot \cos\frac{h+h'}{2} \cdot \sin\frac{h-h'}{2} \cdot \cos^2\frac{s}{2}}{\sin\frac{s+s'}{2} \cdot \sin\frac{s-s'}{2}} - \sin h,$$

woraus δ und φ in nicht logarithmischer Form gefunden werden.

Eleganter jedoch wird die Behandlung, wenn man sich der Hyperbelfunktionen bedient, die im II. Abschnitt zur Lösung einiger Aufgaben herangezogen und dort näher begründet sind. Der Sinus hyperbolicus reicht von $-\infty$ bis $+\infty$, ist also, wie der trigonometrische Tangens, an gar keine

Grenzen gebunden; auch der hyperbolische Kosinus geht von $+1$ bis $+\infty$. Wenn man nun die erste der Gleichungen

$$\sin h = \sin\delta \cdot \sin\varphi + \cos\delta \cdot \cos\varphi \cdot \cos s$$
$$\sin h' = \sin\delta \cdot \sin\varphi + \cos\delta \cdot \cos\varphi \cdot \cos s' \quad (s' = s + \Delta s)$$

durch $\cos s$, die zweite durch $\cos s'$ dividiert, und dann die zweite von der ersten subtrahiert, so erhält man

$$\frac{\sin h}{\cos s} - \frac{\sin h'}{\cos s'} = \sin\delta \cdot \sin\varphi \left[\frac{1}{\cos s} - \frac{1}{\cos s'}\right] \quad \text{(III)}$$

Jetzt setze man

$$\frac{\sin h}{\cos s} = \mathfrak{Sin}\,\alpha; \quad \frac{\sin h'}{\cos s'} = \mathfrak{Sin}\,\beta,$$
$$\frac{1}{\cos s} = \mathfrak{Cof}\,m; \quad \frac{1}{\cos s'} = \mathfrak{Cof}\,n,$$

so wird (III) zu

$$\sin\varphi \cdot \sin\delta = \frac{\mathfrak{Sin}\,\alpha - \mathfrak{Sin}\,\beta}{\mathfrak{Cof}\,m - \mathfrak{Cof}\,n} = \frac{\mathfrak{Cof}\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \mathfrak{Sin}\frac{\alpha-\beta}{2}}{\mathfrak{Sin}\frac{m+n}{2} \cdot \mathfrak{Sin}\frac{m-n}{2}} \quad \text{(IV)}$$

In (I) und (IV) ist eine formell sehr homogene Lösung enthalten.

Man wird nun am besten die Produkte $\sin\varphi \cdot \sin\delta = \sin B$ und $\cos\varphi \cdot \cos\delta = \sin C$ berechnen und dann bilden

$$\cos(\varphi + \delta) = \sin B - \sin C = 2 \cdot \sin\frac{B-C}{2} \cdot \cos\frac{B+C}{2}$$
$$\cos(\varphi - \delta) = \sin B + \sin C = 2 \cdot \sin\frac{B+C}{2} \cdot \cos\frac{B-C}{2}$$

Hieraus ergibt sich φ und δ.

Zahlenbeispiel zu Aufgabe 10:

Mit $h = 71^\circ 15'$; $h' = 68^\circ 34'$; $h'' = 63^\circ 54'$; $\Delta s = 7^\circ 52'$ und $\Delta s' = 20^\circ 36'$ findet sich:

$$\varphi_1 = 67^\circ 55' 35''; \quad \delta_1 = 54^\circ 46' 28''$$
$$\varphi_2 = 54^\circ 46' 28''; \quad \delta_2 = 67^\circ 55' 35''$$
$$s = 28^\circ 48' \quad (1^h 55^m 12^s)$$

Zahlenbeispiel zu Aufgabe 11:

Mit $h = 30^\circ 12'$; $h' = 18^\circ 48'$; $s = 37^\circ 30'$ und $s_1 = 67^\circ 30'$ findet man:

$$\varphi = 63^\circ 27' 41''; \quad \delta = 9^\circ 51' 4''$$

Zu Aufgabe 10 gibt es noch eine allerdings sehr weitschweifige Lösung von Hauff, die sich im vierten Supplementbande des astronomischen Jahrbuchs S. 257ff. findet. Sie erfordert zur Beantwortung aller Fragen das Aufschlagen von 35 Logarithmen, während Mollweide mit 24 auskommt.

12. Aufgabe. (Das Ziehen der Mittagslinie.) Es ist die Lage der Durchschnitte dreier Vertikalkreise mit dem Horizont gegeben, sowie die Höhen, welche die Sonne in jedem Vertikalkreise erreicht hatte; man soll die Richtung der Nordsüdlinie, sowie die geographische Breite des Beobachtungsortes finden.

Das Problem ist griechischen Ursprungs, obwohl wir über seinen Urheber so gut wie nichts wissen. Beschrieben ist uns dasselbe in dem Werke des etwa 100 n. Chr. lebenden römischen Feldmessers Hyginus: „Römische Feldmesser" I, pag. 188—189, trägt aber so entschieden griechischen Charakter, daß M. Cantor in seinen „Vorlesungen über Geschichte der Mathemathik", III. Aufl., I. Band pag. 535, von ihr, die nicht ein Praktiker, sondern nur ein sehr fachkundiger Mathematiker erdacht haben kann, sagt: „Es muß eine griechische Methode aus der Zeit entwickelter Stereometrie sein, wenn es auch nicht möglich ist, sie bei irgendeinem uns erhaltenen griechischen Astronomen nachzuweisen." Trotzdem Mollweide in seiner „Erläuterung einer in den Scriptoribus rei agrariae, edit. Goesii, pag. 176 und 177 gegebenen Vorschrift, aus drei beobachteten ungleichen Schattenlängen die Mittagslinie zu finden" (v. Zach: Monatl. Corresp., Jahrg. 1813, pag. 396—426) eine stereometrische, zwei graphische Lösungen und eine Auflösung dieser interressanten Aufgabe mit Hilfe der sphärischen Trigonometrie gab, so scheint sie doch wenig bekannt zu sein. Auch Mollweide sagt: „Der Urheber der von Hygin gelehrten Methode ist unbekannt; von Hygin selbst rührt sie schwerlich her, höchst wahrscheinlich ist sie von einem griechischen Schriftsteller entlehnt, aber aus einem verloren gegangenen und unbekannten."

Auch von italienischen Mathematikern wurde die Aufgabe öfters behandelt, so von Muzio Oddi (Degli horologii solari trattato, Venetia, 1638) und Roger Jos. Boscovich (Oppera ad Optic. et Astronom. pertinent; Tomo IV, pag. 243), sowie auch von Gauß („Über eine Aufgabe der sphär. Astronomie. v. Zach Monatl. Corresp. Jahrg. 1799)[1]).

Bezeichnet man den Winkel, welchen der erste Vertikalkreisdurchschnitt mit der Nordsüdlinie bildet, mit x, die zwei folgenden (bekannten) Azimutwinkel mit α' und α'', die drei Höhen mit h, h' und h'', so hat man die drei Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \sin\delta &= \sin\varphi \cdot \sin h + \cos\varphi \cdot \cos h \cdot \cos x \\ \sin\delta &= \sin\varphi \cdot \sin h' + \cos\varphi \cdot \cos h' \cdot \cos(\alpha' + x) \\ \sin\delta &= \sin\varphi \cdot \sin h'' + \cos\varphi \cdot \cos h'' \cdot \cos(\alpha'' + x) \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (I)$$

Die Elimination von δ führt zu den Gleichungen

$$\frac{\sin\varphi \cdot \sin h' + \cos\varphi \cdot \cos h' \cdot \cos(\alpha' + x)}{\sin\varphi \cdot \sin h + \cos\varphi \cdot \cos h \cdot \cos x} = 1$$

$$\frac{\sin\varphi \cdot \sin h'' + \cos\varphi \cdot \cos h'' \cdot \cos(\alpha'' + x)}{\sin\varphi \cdot \sin h + \cos\varphi \cdot \cos h \cdot \cos x} = 1,$$

[1]) In unseren schon zitierten „Beiträge zur konstruktiven usw." findet sich auch eine rein geometrische Lösung mittels der Zentralperspektive, auch die graphische Behandlung Mollweides ist angeführt.

oder, wenn man in beiden Gleichungen Zähler und Nenner mit $\cos\varphi$ dividiert und nach tang φ auflöst, zu

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{\cos h' \cdot \cos(\alpha' + x) - \cos h \cdot \cos x}{\sin h - \sin h'} \quad \ldots\ldots \text{(II)}$$

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{\cos h'' \cdot \cos(\alpha'' + x) - \cos h \cdot \cos x}{\sin h - \sin h''} \quad \ldots\ldots \text{(III)}$$

Durch Division von (II) in (III) folgt

$$\frac{\sin\frac{h-h'}{2} \cdot \cos\frac{h+h'}{2}}{\sin\frac{h-h''}{2} \cdot \cos\frac{h+h''}{2}} = \frac{\cos h''(\cos\alpha''\cos x - \sin\alpha''\sin x) - \cos h \cdot \cos x}{\cos h'(\cos\alpha' \cdot \cos x - \sin\alpha' \cdot \sin x) - \cos h \cdot \cos x} = A$$

oder

$$A = \frac{\frac{\cos h''}{\cos h} \cdot (\cos\alpha'' - \sin\alpha'' \operatorname{tang} x) - 1}{\frac{\cos h'}{\cos h} \cdot (\cos\alpha' - \sin\alpha' \operatorname{tang} \cdot x) - 1}.$$

Wir lösen jetzt nach tang x auf und haben in abgekürzter Schreibweise:

$$A(B - C \cdot \operatorname{tang} x) - A = B' - C' \cdot \operatorname{tang} x - 1$$

$$AB - AC \cdot \operatorname{tang} x + C' \cdot \operatorname{tang} x = A + B' - 1$$

$$\operatorname{tang} x = \frac{AB - A - B' + 1}{AC - C'},$$

womit Winkel x gefunden ist.

Die benützten Abkürzungen sind

$$\frac{\cos\alpha' \cdot \cos h'}{\cos h} = B; \qquad \frac{\cos\alpha'' \cdot \cos h''}{\cos h} = B'$$

$$\frac{\sin\alpha' \cdot \cos h'}{\cos h} = C; \qquad \frac{\sin\alpha'' \cdot \cos h''}{\cos h} = C'.$$

Mit der Kenntnis von x findet sich aus (II) oder (III) auch leicht φ.

In seinen Elementen der ebenen, sphärischen und sphäroidischen Trigonometrie, Leipzig 1837, hat J. A. Grunert pag. 202, 205 und 237 rein analytische Lösungen der Aufgabe gegeben, die freilich vieler gekünstelter Umformungen bedürfen, bis man auf logarithmische Endformeln kommt.

Bereits in Aufgabe 5 handelte es sich um die Bestimmung der Polhöhe aus den beobachteten Zwischenzeiten der Momente gleicher Höhen zweier bekannten Sterne. Sie ist ein Spezialfall des Gaußschen Dreihöhenproblems, welches wir so aussprechen wollen:

13. Aufgabe. Aus den Zwischenzeiten zwischen den Momenten, wo drei Sterne, für welche man die Deklinationen und die zwischen ihren Deklinationskreisen liegenden Bogen des Äquators kennt, (Rektaszensionsdifferenzen) gleiche, jedoch willkürliche Höhen, die

zunächst unbekannt sind, erreichen, Stundenwinkel, Polhöhe und Höhe der drei Sterne zu berechnen.

Die Auflösung ist ganz analog der in Aufgabe 5 und kann deshalb hier übergangen werden. Sie findet sich in extenso durchgeführt bei Brünnow a. a. O. pag. 303 und bei Grunert a. a. O. pag. 225ff.

Eine Verallgemeinerung der Gaußschen Höhenaufgabe besteht nun darin, die verschwindenden Höhendifferenzen durch Beobachtung beliebiger Differenzen zu ersetzen. Man kann dann Aufgabe 5 verallgemeinern zur

14. Aufgabe. Aus den beobachteten Differenzen der Höhen und Azimute zweier Sterne, sowie der Zwischenzeit der Beobachtungen beider Sterne, Zeit und Polhöhe, sowie die Höhen und Azimute selbst zu finden.

Wir bezeichnen die Winkel an den Sternen (s. Fig. 6) mit v und v' (Variation). Im Dreieck SZS' ist bekannt der Winkel $SZS' = \alpha' - \alpha$, auch kann $SS' = D$ (Großkreisbogen) als bekannt gelten. Dann folgt mit Hilfe der Gaußschen Gleichungen:

$$\sin\tfrac{1}{2}(v'+v) = \frac{\cos\frac{1}{2}(h'-h)\cdot\cos\frac{1}{2}(\alpha'-\alpha)}{\cos\frac{D}{2}} \quad . \; . \; . \; . \quad \text{(I)}$$

$$\sin\tfrac{1}{2}(v'-v) = \frac{\sin\frac{1}{2}(h'-h)\cdot\cos\frac{1}{2}(\alpha'-\alpha)}{\sin\frac{D}{2}} \quad . \; . \; . \; . \quad \text{(II)}$$

und nach den Neperschen Regeln:

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(h'+h) = \frac{\cos\frac{1}{2}(v'+v)}{\cos\frac{1}{2}(v'-v)}\cdot\operatorname{cotg}\frac{D}{2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{(III)}$$

Aus (I) und (II) findet man zunächst $\frac{1}{2}(v'+v)$ und $\frac{1}{2}(v'-v)$ und mit deren Kenntnis aus (III) die Summe der Höhen: $h+h'$. Da ihre Differenz nach Text der Aufgabe bekannt ist, so lassen sich die Höhen selbst bestimmen.

Im Dreieck SZS' ist

$$\sin h' = \sin h\cdot\cos D + \cos h\cdot\sin D\cdot\cos(u+v) \quad . \; . \; . \quad \text{(VI)}$$

womit man den Winkel u findet, während man aus Dreieck PSS' hat:

$$\cos\delta' = \frac{\sin u}{\sin(s'-s)}\cdot\sin D \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{(V)}$$

Dadurch ist auch δ' bekannt. So folgt endlich:

$$\sin\varphi = \sin\delta'\cdot\sin h' + \cos\delta'\cdot\cos h'\cdot\cos v' \quad . \; . \; . \; . \quad \text{(VI)}$$

Der Sinussatz auf Dreieck PZS angewandt, gibt

$$\sin s = \frac{\sin v\cdot\sin h}{\cos\varphi} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{(VII)}$$

Derselbe Satz liefert im Dreieck PZS' auch α' und damit α, weil $\alpha'-\alpha$ bekannt ist.

15. Aufgabe. Aus den beobachteten Differenzen der Höhen dreier Sterne und den Zwischenzeiten der Beobachtungen die absoluten Höhen, Zeit und geographische Breite des Beobachtungsortes zu ermitteln.

Wie man sieht, ist diese Aufgabe die Verallgemeinerung des Gaußschen Dreihöhenproblems (s. Aufg. 13). Sie ist in dieser Fassung von A. Wilkens (Kiel) gestellt und in sehr einfacher und eleganter Weise gelöst worden („Über die Verallgemeinerung des Gaußschen Dreihöhenproblems", Astronom. Nachrichten, Bd. 191, No. 4580, 1912). Wie bereits in Aufgabe 14, so spielt auch hier der Winkel am Stern in der Lösung eine nützliche Rolle. Nach Wilkens sind gegeben die Koordinaten δ_1, δ_2, δ_3, a_1, a_2 und a_3 der drei Sterne, unter δ die Deklination, unter a die Rektaszension verstanden. Die Höhen der Sterne seien bzw. h, $h+\Delta h$, $h+\Delta h'$, wo also Δh und $\Delta h'$ bekannt sind. Ist ferner τ_1 die Sternzeit (Stundenwinkel des Widderpunktes) bei der ersten Beobachtung, τ_2 und τ_3 aber dieselben Größen bei der zweiten und dritten Messung, s, $s+\Delta s$ und $s+\Delta s'$ die zugehörigen Stundenwinkel der drei Sterne, so ist nach dem Satz:

$$\text{Rektaszension} + \text{Stundenwinkel} = \text{Sternzeit:}$$

$$\begin{aligned} s &= \tau_1 - a_1 \\ s+\Delta s &= \tau_2 - a_2 \\ \hline \text{Mithin} \quad \Delta s &= \tau_2 - \tau_1 - (a_2 - a_1) \\ \text{und ebenso} \quad \Delta s' &= \tau_3 - \tau_1 - (a_3 - a_1); \end{aligned}$$

es sind also Δs und $\Delta s'$ bekannte Größen. Man ist daher zur Aufstellung der folgenden drei Gleichungen berechtigt:

$$\left.\begin{aligned} \sin h &= \sin\varphi \cdot \sin\delta_1 + \cos\varphi \cdot \cos\delta_1 \cdot \cos s \\ \sin(h+\Delta h) &= \sin\varphi \cdot \sin\delta_2 + \cos\varphi \cdot \cos\delta_2 \cdot \cos(s+\Delta s) \\ \sin(h+\Delta h') &= \sin\varphi \cdot \sin\delta_3 + \cos\varphi \cdot \cos\delta_3 \cdot \cos(s+\Delta s') \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad \text{(I)}$$

Nun werde zur Bestimmung von h, s und φ der parallaktische Winkel v des ersten Sterns als Hilfsgröße eingeführt. Die Anwendung der Grundgleichungen der sphärischen Astronomie auf das durch Pol, Zenit und ersten Stern gebildete Dreieck gibt

$$\left.\begin{aligned} \sin\varphi &= \sin h \cdot \sin\delta_1 + \cos h \cdot \cos\delta_1 \cdot \cos v \\ \cos\varphi \cdot \sin s &= \cos h \cdot \sin v \\ \cos\varphi \cdot \cos s &= \sin h \cdot \cos\delta_1 - \cos h \cdot \sin\delta_1 \cdot \cos v \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad \text{(II)}$$

Substituiert man jetzt diese Ausdrücke in die zweite und dritte Gleichung des Systems (I), so daß φ und s durch h und v ersetzt werden, so erhalten wir durch Zusammenfassung der Koeffizienten von $\sin h$ und $\cos h$:

$$\left.\begin{aligned} \sin h[\cos\Delta h - \sin\delta_1 \sin\delta_2 - \cos\delta_1 \cdot \cos\delta_2 \cdot \cos\Delta s] &= \cos h[-\cos\delta_2 \cdot \sin\Delta s \cdot \sin v \\ &\quad + (\cos\delta_1 \cdot \sin\delta_2 - \sin\delta_1 \cdot \cos\delta_2 \cdot \cos\Delta s) \cdot \cos v - \sin\Delta h] \\ \sin h[\cos\Delta h' - \sin\delta_1 \cdot \sin\delta_3 - \cos\delta_1 \cdot \cos\delta_3 \cdot \cos\Delta s'] &= \cos h[-\cos\delta_3 \cdot \sin\Delta s' \cdot \sin v \\ &\quad + (\cos\delta_1 \cdot \sin\delta_3 - \sin\delta_1 \cdot \cos\delta_3 \cdot \cos\Delta s') \cdot \cos v - \sin\Delta h'] \end{aligned}\right\} \text{(IIa)}$$

Daraus folgt durch Division:

$$\left.\begin{array}{r} -\cos\delta_2\cdot\sin\Delta s\cdot\sin v+(\cos\delta_1\cdot\sin\delta_2-\sin\delta_1\cdot\cos\delta_2\cos\Delta s)\cdot\cos v-\sin\Delta h \\ -\cos\delta_3\cdot\sin\Delta s'\cdot\sin v+(\cos\delta_1\cdot\sin\delta_3-\sin\delta_1\cdot\cos\delta_3\cdot\cos\Delta s')\cdot\cos v-\sin\Delta h' \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{r} \cos\Delta h-\sin\delta_1\cdot\sin\delta_2-\cos\delta_1\cdot\cos\delta_2\cdot\cos\Delta s \\ \cos\Delta h'-\sin\delta_1\cdot\sin\delta_3-\cos\delta_1\cdot\cos\delta_3\cdot\cos\Delta s' \end{array}\right\} \quad \text{(III)}$$

Gleichung (III) enthält nur noch die Unbekannte v. Durch Beseitigen der Nenner kann sie auf die Form gebracht werden:

$$\alpha\cdot\sin v+\beta\cdot\cos v=\gamma \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(IV)}$$

wenn man setzt

$$\alpha=\cos\delta_2\cdot\sin\Delta s\cdot\cos\Delta h'-\cos\delta_3\cdot\sin\Delta s'\cdot\cos\Delta h+\cos\delta_1\cdot\cos\delta_2\cdot\cos\delta_3\cdot\sin(\Delta s'-\Delta s)$$
$$+\sin\delta_1\cdot(\sin\delta_2\cdot\cos\delta_3\cdot\sin\Delta s'-\sin\delta_3\cdot\cos\delta_2\cdot\sin\Delta s)$$

$$\beta=\sin(\delta_3-\delta_1)\cdot\cos\Delta h+\sin(\delta_1-\delta_2)\cdot\cos\Delta h'+2\sin\delta_1\cdot\cos\delta_3\cdot\cos\Delta h\cdot\sin^2\frac{\Delta s'}{2}$$
$$-2\sin\delta_1\cdot\cos\delta_2\cdot\cos\Delta h'\cdot\sin^2\frac{\Delta s}{2}-\cos\delta_2\cdot\sin\delta_3\cdot\cos\Delta s+\cos\delta_3\cdot\sin\delta_2\cdot\cos\Delta s'$$

$$\gamma=\sin(\Delta h'-\Delta h)-\sin\Delta h'\cdot(\sin\delta_1\cdot\sin\delta_2+\cos\delta_1\cdot\cos\delta_2\cdot\cos\Delta s)$$
$$+\sin\Delta h\cdot(\sin\delta_1\cdot\sin\delta_3+\cos\delta_1\cdot\cos\delta_3\cdot\cos\Delta s')$$

Sind hieraus α, β und γ berechnet, so kann man in (IV) setzen

$$\alpha=m\cdot\cos M;\quad \beta=m\cdot\sin M,$$

so daß dann wird

$$\gamma=m\cdot\sin(v+M) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(V)}$$

Hat man aus (V) v bestimmt, so findet sich aus einer der Gleichungen IIa leicht h, nachdem man sie zuerst nach $\operatorname{tang} h$ aufgelöst hat. Die Breite φ ergibt sich alsdann aus der ersten Gleichung des Systems (II) und die Zeit s aus der zweiten Zeile desselben Komplexes.

In Bodes astronom. Jahrbuch (1812 pag. 129ff.) hat Gauß noch eine andere Art der Breitenbestimmung gelehrt. Die Problemstellung ist diese:

16. Aufgabe. Aus den Höhen zweier bekannten Sterne Zeit und Polhöhe zu finden. Gegeben sind demnach h_1 und h_2, δ_1 und δ_2, sowie die Rektaszensionsdifferenz s_2-s_1. Durch Anwendung der Neperschen Formeln auf das sphärische Dreieck S_1PS_2 (Fig. 7) findet man

$$\operatorname{tang}\frac{u_1+u_2}{2}=\frac{\cos\frac{\delta_1-\delta_2}{2}}{\sin\frac{\delta_1+\delta_2}{2}}\cdot\operatorname{cotg}\frac{s_2-s_1}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(I)}$$

$$\operatorname{tang}\frac{u_1-u_2}{2}=\frac{\sin\frac{\delta_1-\delta_2}{2}}{\cos\frac{\delta_1+\delta_2}{2}}\cdot\operatorname{cotg}\frac{s_2-s_1}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(II)}$$

Hat man hieraus u_1 und u_2 gefunden, so berechnet sich der Großkreisbogen $S_1 S_2$ mittels einer der folgenden Formeln:

$$\sin S_1 S_2 = \sin D = \frac{\cos\delta_1 \cdot \sin(s_2 - s_1)}{\sin u_1} = \frac{\cos\delta_2 \cdot \sin(s_2 - s_1)}{\sin u_2}$$

Im Dreieck $S_1 Z S_2$ sind nunmehr alle drei Seiten bekannt, und es kann $\measuredangle Z S_1 S_2 = u_1 + v$ gefunden werden durch die Formel

$$\operatorname{tang}\frac{u_1 + v}{2} = \sqrt{\frac{\cos\frac{1}{2}(D + h_1 + h_2) \cdot \sin\frac{1}{2}(D + h_1 - h_2)}{\cos\frac{1}{2}(-D + h_1 + h_2) \cdot \sin\frac{1}{2}(D - h_1 + h_2)}} \quad . \quad . \quad \text{(III)}$$

Mit der Kenntnis von v gibt jetzt der Kosinussatz im Dreieck PZS_1:

$$\sin\varphi = \sin\delta_1 \cdot \sin h_1 + \cos\delta_1 \cdot \cos h_1 \cdot \cos v \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(IV)}$$

also die gesuchte Breite φ, während sich die Zeit endlich aus demselben Dreieck errechnet zu

$$\cos s = \frac{\sin h_1 - \sin\delta_1 \cdot \sin\varphi}{\cos\delta_1 \cdot \cos\varphi} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(V)}$$

17. Aufgabe. Man kennt die Azimute α_1 und α_2 zweier gleichzeitig beobachteten Sterne der bekannten Deklinationen δ_1 und δ_2; gesucht ist die Polhöhe φ des Beobachtungsortes.

Diese unter dem Namen „Das Pothenotsche Problem auf der Kugel" bekannte Aufgabe hat noch eine sehr kurze Geschichte. Man findet die eigenartige Aufgabe zum erstenmal behandelt von Grunert (Archiv f. Mathem. u. Phys., 7. Teil, 1846, pag. 104 und 47. Teil, 1867, pag. 194—203). Nach seinen Angaben war dieselbe in einer Schrift gestellt. Es ist daher nicht unmöglich, daß Ende der 60er Jahre Lösungen veröffentlicht worden sind. Grunert gelangt zu einer Schlußgleichung 4. Grades, deren direkte Lösung er mit Hilfe einer kubischen Resolvente durchführt. Mehr Rücksicht auf praktische Anwendung nahm die Behandlung desselben Problems durch Rümker (Handbuch der Schiffahrtskunde, Hamburg, 1847, pag. 151), der wohl von der richtigen Erkenntnis geleitet war, daß Azimutbeobachtungen gegenüber den mit dem Refraktionsfehler behafteten Höhenmessungen große Vorzüge für die Bestimmung der Polhöhe haben. Allein dieser Vorteil wiegt die Schwierigkeiten nicht auf, welche die sehr komplizierte Endgleichung der Auflösung darbietet, die von Rümker durch Nährungsverfahren bewerkstelligt wird. Diese Lösungen scheinen keinen Eingang in die Lehrbücher gefunden zu haben. Uns ist nur die Trigonometrie von Heis bekannt, in welcher sich im Wesentlichen die Grunertsche Lösung findet. (Vgl. E. Heis: Lehrbuch der Geometrie, Köln 1888, 3. Teil pag. 271ff.) Erwähnt wird das Problem auch noch von Weyer (Zeit- und Ortsbestimmung; allg. Encyklopädie der Physik, pag. 738). Eine sehr elegante Behandlung erfuhr unsere Aufgabe durch S. Günther (Das Pothenotsche Problem auf der Kugelfläche; Sitzungsber. d. math.-physikal. Klasse der K. Bayr. Akademie der Wissensch. München 1904, pag. 115), dessen Ansatzgleichungen wir weiter unten geben

werden. A. Wedemeyer hat sich in jüngster Zeit sehr eingehend mit der Aufgabe beschäftigt und deren Behandlung gewissermaßen zum Abschluß gebracht (vgl. dessen Abhandlung: Die Azimutgleichen und das Pothenotsche Problem auf der Kugel. Ann. d. Hydrogr. 1910, S. 433 ff.)

1. Die Lösung von Rümker. Der ehemalige Direktor der Hamburger Seewarte geht von folgender Problemstellung aus: Es sind die gleichzeitigen Azimute α_1, α_2 und α_3 dreier bekannter Sterne gegeben; gesucht ist die Breite φ des Beobachtungsortes.

In diesem Falle kommt der Pol zunächst gar nicht in Betracht, und man muß zuerst die Berechnung der drei Sternhöhen anstreben. Sind diese bekannt, so ist die Aufgabe auf 12 zurückgeführt. Das Dreieck $S_1 S_2 S_3$ (Fig. 8) ist nach Voraussetzung gegeben durch seine drei Seiten a, b und c. Außerdem sind im Viereck $S_1 S_2 S_3 Z$ noch bekannt die beiden Winkel $S_1 Z S_2 = \alpha_1 - \alpha_2$ und $S_2 Z S_3 = \alpha_2 - \alpha_3$. Die Diagonale $Z S_2$ teilt den bekannten Winkel $S_1 S_2 S_3 = \gamma$ in zwei Teile: δ und ε. Wie man nun zur Kenntnis von δ und ε einzeln kommt, womit ja sofort die drei Höhen berechenbar sind, hat Rümker zuerst gezeigt. Er setzt:

$$\delta + \varepsilon = \gamma$$
$$\delta - \varepsilon = \Delta,$$

also

$$\delta = \frac{\gamma}{2} + \frac{\Delta}{2}; \quad \varepsilon = \frac{\gamma}{2} - \frac{\Delta}{2}.$$

Nimmt man beiderseits den Sinus, so ergeben sich die Gleichungen

$$\sin\delta = \sin\frac{\gamma}{2} \cdot \cos\frac{\Delta}{2} + \cos\frac{\gamma}{2} \cdot \sin\frac{\Delta}{2} \quad \ldots\ldots \quad (\mathrm{I})$$

$$\sin\varepsilon = \sin\frac{\gamma}{2} \cdot \cos\frac{\Delta}{2} - \cos\frac{\gamma}{2} \cdot \sin\frac{\Delta}{2} \quad \ldots\ldots \quad (\mathrm{II})$$

Erhebt man (I) und (II) ins Quadrat und beachtet, daß $\cos^2\frac{\gamma}{2} - \sin^2\frac{\gamma}{2} = \cos\gamma$, $2 \cdot \sin\frac{\gamma}{2} \cdot \cos\frac{\gamma}{2} = \sin\gamma$ ist, so findet man

$$\sin^2\delta = \sin^2\frac{\gamma}{2} + \cos\gamma \cdot \sin^2\frac{\Delta}{2} + \tfrac{1}{2}\sin\gamma \cdot \sin\Delta \quad \ldots\ldots \quad (\mathrm{III})$$

$$\sin^2\varepsilon = \sin^2\frac{\gamma}{2} + \cos\gamma \cdot \sin^2\frac{\Delta}{2} - \tfrac{1}{2}\sin\gamma \cdot \sin\Delta \quad \ldots\ldots \quad (\mathrm{IV})$$

Multipliziert man hingegen (I) mit (II) so folgt

$$\sin\delta \cdot \sin\varepsilon = \sin^2\frac{\gamma}{2}\left(1 - \sin^2\frac{\Delta}{2}\right) - \left(1 - \sin^2\frac{\gamma}{2}\right) \cdot \sin^2\frac{\Delta}{2}$$

$$= \sin^2\frac{\gamma}{2} - \sin^2\frac{\Delta}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\mathrm{V})$$

Aus den Dreiecken $S_1 Z S_2$ und $S_2 Z S_3$ folgt nach dem Sinussatz:

$$\cos h_1 = \frac{\sin a \cdot \sin \delta}{\sin(\alpha_1 - \alpha_2)}; \qquad \cos h_3 = \frac{\sin b \cdot \sin \varepsilon}{\sin(\alpha_2 - \alpha_3)},$$

während man für die Seite c nach dem Kosinussatz findet:

$$\cos c = \sin h_1 \cdot \sin h_3 + \cos h_1 \cdot \cos h_3 \cdot \cos(\alpha_1 - \alpha_3) \quad . \quad . \quad . \quad \text{(VI)}$$

In diese Gleichung (VI) setzen wir für $\sin h_1$, $\sin h_3$, $\cos h_1$ und $\cos h_3$ ihre Werte ein und bekommen

$$\cos s = \frac{\sin a \cdot \sin b \cdot \sin \delta \cdot \sin \varepsilon \cdot \cos(\alpha_1 - \alpha_3)}{\sin(\alpha_1 - \alpha_2) \cdot \sin(\alpha_2 - \alpha_3)} + \frac{\sqrt{[\sin^2(\alpha_1 - \alpha_2) - \sin^2 a \cdot \sin^2 \delta]\,[\sin^2(\alpha_2 - \alpha_3) - \sin^2 b \cdot \sin^2 \varepsilon]}}{\sin(\alpha_1 - \alpha_2) \cdot \sin(\alpha_2 - \alpha_3)} \quad \text{(VII)}$$

Die Ausdrücke $\sin^2 \delta$, $\sin^2 \varepsilon$ und $\sin \delta \cdot \sin \varepsilon$ haben wir bereits als Funktionen von Δ dargestellt. Wir quadrieren jetzt (VII), indem wir die Wurzel isolieren. Statt $\sin \Delta$ schreiben wir noch zuvor

$$\frac{2 \operatorname{tang} \frac{\Delta}{2}}{1 + \operatorname{tang}^2 \frac{\Delta}{2}} \quad \text{und statt} \quad \sin^2 \frac{\Delta}{2}: \quad \frac{\operatorname{tang}^2 \frac{\Delta}{2}}{1 + \operatorname{tang}^2 \frac{\Delta}{2}}$$

Der Übersichtlichkeit wegen seien die folgenden abkürzenden Bezeichnungen eingeführt:

$$\begin{aligned}
A &= \sin^2 c \cdot \sin^2(\alpha_1 - \alpha_2) \cdot \sin^2(\alpha_2 - \alpha_3) \\
B &= \sin^2 a \cdot \sin^2 b \cdot \sin^2(\alpha_1 - \alpha_3) \\
C &= 2 \sin a \cdot \sin b \cdot \sin(\alpha_1 - \alpha_2) \cdot \sin(\alpha_1 - \alpha_3) \cdot \sin(\alpha_2 - \alpha_3) \\
D &= \sin^2 a \cdot \sin^2(\alpha_2 - \alpha_3) \\
E &= \sin^2 b \cdot \sin^2(\alpha_1 - \alpha_2) \\
A' &= \left(D + E - C - B \cdot \sin^2 \frac{\gamma}{2}\right) \cdot \sin^2 \frac{\gamma}{2} - A \\
B' &= (D + E) \cdot \cos \gamma + 2B \cdot \sin^2 \frac{\gamma}{2} + C \\
C' &= \frac{E - D}{2} \cdot \sin \gamma .
\end{aligned}$$

Dann wird die Schlußgleichung zur Bestimmung von Δ:

$$(A' + B' - C') \cdot \operatorname{tang}^4 \frac{\Delta}{2} - 2C' \cdot \operatorname{tang}^3 \frac{\Delta}{2} + (2A' + B') \cdot \operatorname{tang}^2 \frac{\Delta}{2} - 2C' \cdot \operatorname{tang} \frac{\Delta}{2} + A' = 0$$

2. Die Lösung Günthers. Sie bezieht sich auf die Formulierung der Aufgabe in dem zu Anfang gegebenen Wortlaut, ist also von der Rümkerschen Fassung etwas verschieden. Günther faßt das sphärische Viereck $S' S'' P Z$ (Fig. 9) ins Auge. Das sphärische Dreieck $S' P S''$ ist vollständig bekannt. Die Hilfsgrößen sind die Winkel μ_1 und μ_2, in welche die Diagonale $Z S''$

den Winkel γ zerteilt. Sei noch für den Moment $\sphericalangle PZS'' = \alpha$, $\sphericalangle S'ZS'' = \beta$, und seien die unbekannten Höhen der zwei Sterne y und z, so stehen uns nach Günther folgende vier Bestimmungsgleichungen zu Gebote:

$$\mu_1 + \mu_2 = \gamma \quad \ldots\ldots \quad \text{(I)}$$

$$\sin\varphi \cdot \sin y + \cos\varphi \cdot \cos y \cdot \cos(\alpha+\beta) = \sin\delta_1 \quad \ldots\ldots \quad \text{(II)}$$

$$\frac{\sin(90^0-\varphi)}{\sin\mu_2} = \frac{\sin(90^0-\delta_2)}{\sin\alpha} = \frac{1}{m} \quad \ldots\ldots \quad \text{(III)}$$

$$\frac{\sin(90^0-y)}{\sin\mu_1} = \frac{\sin(90^0-\delta_1)}{\sin\beta} = \frac{1}{n} \quad \ldots\ldots \quad \text{(IV)}$$

Aus (III) und (IV) folgt:

$$\sin\mu_2 = m \cdot \sin(90^0-\varphi)$$

$$\sin\mu_1 = n \cdot \sin(90^0-y),$$

und aus (I)

$$\cos\gamma = \cos\mu_1 \cdot \cos\mu_2 - \sin\mu_1 \cdot \sin\mu_2,$$

mithin

$$\cos\mu_1 \cdot \cos\mu_2 = \cos\gamma + mn \cdot \cos\varphi \cdot \cos y,$$

oder

$$(1-m^2\cos^2\varphi)(1-n^2\cos^2 y) = \cos^2\gamma + 2mn \cdot \cos\gamma \cdot \cos y \cdot \cos\varphi + m^2n^2\cos^2 y \cdot \cos^2\varphi,$$

das ist

$$1 - m^2\cos^2\varphi - n^2\cos^2 y = \cos^2\gamma + 2mn\cos\gamma \cdot \cos y \cdot \cos\varphi \quad \ldots\ldots \quad \text{(V)}$$

Setzt man zur Abkürzung noch

$$\cos\varphi = \zeta; \quad \cos y = \eta,$$

so wird (V) zu

$$\sin^2\gamma = m^2\zeta^2 + 2mn\cos\gamma \cdot \zeta \cdot \eta + n^2\eta^2 \quad \ldots\ldots \quad \text{(VI)}$$

Die Gleichung (II) können wir ähnlich umgestalten:

$$\sin\varphi \cdot \sin y = \sin\delta_1 - \cos\varphi \cdot \cos y \cdot \cos(\alpha+\beta)$$

$$(1-\zeta^2)\cdot(1-\eta^2) = [\sin\delta_1 - \zeta\cdot\eta\cdot\cos(\alpha+\beta)]^2$$

$$-\cos^2\delta_1 = \zeta^2\cdot\eta^2\cdot\sin^2(\alpha+\beta) + 2\sin\delta_1\cdot\cos(\alpha+\beta)\cdot\zeta\cdot\eta - \zeta^2 - \eta^2 \quad \text{(VII)}$$

So findet sich denn als neues Paar

$$\eta^2\cdot[1-\zeta^2\sin^2(\alpha+\beta)] - \eta\cdot 2\zeta\cdot\sin\delta_1\cdot\cos(\alpha+\beta) + (\zeta^2 - \cos^2\delta_1) = 0$$

$$\eta^2\cdot n^2 + \eta\cdot 2\zeta\cdot mn\cos\gamma + (\zeta^2m^2 - \sin^2\gamma) = 0$$

Hieraus läßt sich die Unbekannte η mit Hilfe der Sylvesterschen Determinante eliminieren. Das gibt

$$\begin{vmatrix} 1-\zeta^2\cdot\sin^2(\alpha+\beta) & -2\zeta\cdot\sin\delta_1\cdot\cos(\alpha+\beta) & \zeta^2-\cos^2\delta_1 & 0 \\ 0 & 1-\zeta^2\sin^2(\alpha+\beta) & -2\zeta\cdot\sin\delta_1\cdot\cos(\alpha+\beta) & \zeta^2-\cos^2\delta_1 \\ n^2 & 2\zeta m\cdot n\cdot\cos\gamma & \zeta^2m^2-\sin^2\gamma & 0 \\ 0 & n^2 & 2\zeta\cdot m\cdot n\cos\gamma & \zeta^2m^2-\sin^2\gamma \end{vmatrix} = 0$$

Diese viergliedrige Determinante gilt es auszuwerten; alsdann ist noch $\zeta = \cos\varphi$; $180^0 - \alpha = \alpha_2$; $\beta = \alpha_2 - \alpha_1$ zu setzen. Man findet eine außerordentlich verwickelte Gleichung vom achten Grade in geraden Potenzen von $\cos\varphi$, so daß sie sich sofort auf den erwarteten vierten Grad herunterbringen läßt.

3. Zum Schlusse geben wir noch eine Lösung des Problems in der Fassung, daß es der Douwesschen Aufgabe ganz angeglichen ist: Gegeben die Deklination, zwei Azimute und die Zwischenzeit der Beobachtungen, gesucht die Polhöhe[1]). Man kommt sogar mit der Aufstellung von nur zwei Gleichungen zwischen den Unbekannten φ und ξ aus, (ξ = unbekannter Stundenwinkel bei der ersten Messung) wenn man den sog. Kotangentensatz der sphärischen Trigonometrie anwendet. Dann hat man aus den zwei Kugeldreiecken $PS'Z$ und $PS''Z$ der Fig. 9 sofort:

$$\sin\varphi \cdot \cos\xi = \cos\varphi \cdot \operatorname{tang}\delta + \operatorname{cotg}\alpha_1 \cdot \sin\xi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(I)}$$

$$\sin\varphi \cdot \cos(\Delta s + \xi) = \cos\varphi \cdot \operatorname{tang}\delta + \operatorname{cotg}\alpha_2 \cdot \sin(\Delta s + \xi) \quad . \quad . \quad . \quad \text{(II)}$$

wo also jetzt $\delta_1 = \delta_2 = \delta$ ist. Indem man (I) und (II) beiderseits durch $\cos\xi$ dividiert, erhält man

$$\sin\varphi = \frac{\cos\varphi \cdot \operatorname{tang}\delta}{\cos\xi} + \operatorname{cotg}\alpha_1 \cdot \operatorname{tang}\xi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(III)}$$

$$\sin\varphi\,(\cos\Delta s - \sin\Delta s \operatorname{tang}\xi) = \frac{\cos\varphi \cdot \operatorname{tang}\delta}{\cos\xi} + \operatorname{cotg}\alpha_2\,(\sin\Delta s + \cos\Delta s \cdot \operatorname{tang}\xi) \quad \text{(IV)}$$

Subtrahiert man jetzt (III) von (IV), so folgt

$$\sin\varphi\,(\cos\Delta s - \sin\Delta s \cdot \operatorname{tang}\xi - 1)$$
$$= \operatorname{cotg}\alpha_2 \cdot \sin\Delta s + \operatorname{tang}\xi\,(\operatorname{cotg}\alpha_2 \cdot \cos\Delta s - \operatorname{cotg}\alpha_1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(V)}$$

und hieraus

$$\operatorname{tang}\xi = \frac{\sin\varphi \cdot \cos\Delta s - \operatorname{cotg}\alpha_2 \cdot \sin\Delta s - \sin\varphi}{\sin\varphi \cdot \sin\Delta s + \operatorname{cotg}\alpha_2 \cdot \cos\Delta s - \operatorname{cotg}\alpha_1}.$$

Setzt man diesen Wert von $\operatorname{tang}\xi$ in (III) ein, unter Beachtung, daß $\frac{1}{\cos\xi} = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\xi}$ ist, so hat man schon die gesuchte Gleichung zwischen φ, α_1, α_2, δ und Δs in impliziter Form, nämlich

$$\sin\varphi - \frac{\operatorname{cotg}\alpha_1 \cdot \sin\varphi \cdot \cos\Delta s - \operatorname{cotg}\alpha_1 \cdot \operatorname{cotg}\alpha_2 \cdot \sin\Delta s - \sin\varphi \cdot \operatorname{cotg}\alpha_1}{\sin\varphi \cdot \sin\Delta s + \operatorname{cotg}\alpha_2 \cdot \cos\Delta s - \operatorname{cotg}\alpha_1}$$
$$= \operatorname{tang}\delta \cdot \sqrt{(1 - \sin^2\varphi) \cdot \left[1 + \frac{\sin\varphi \cdot \cos\Delta s - \operatorname{cotg}\alpha_2 \cdot \sin\Delta s - \sin\varphi}{\sin\varphi \cdot \sin\Delta s + \operatorname{cotg}\alpha_2 \cdot \cos\Delta s - \operatorname{cotg}\alpha_1}\right]^2}$$

Diese elementare Ableitung der Bestimmungsgleichung von φ kann von Schülern höherer Lehranstalten leicht bewerkstelligt werden, und es liegt daher kein Grund mehr vor, das Pothenotsche Problem aus den Lehrbüchern der sphärischen Trigonometrie auszuschließen. Durch Quadrieren und Fortschaffen des Nenners findet man eine Schlußgleichung 4. Grades in $\sin\varphi$, nämlich

---

[1]) So haben wir die Aufgabe in unseren „Beiträge zur Nautischen Astronomie“ (Aus dem Archiv dor Deutschen Sternwarte, 1910, pag. 9) formuliert. Leider ist unsere Endgleichung dort durch einen Rechenfehler entstellt.

$$\sin^4\varphi \cdot [\sin^2 \Delta s + \operatorname{tang}^2\delta(1 - 2\cos \Delta s)] + 2\sin^3\varphi \cdot \sin \Delta s \cdot (\operatorname{cotg}\alpha_2 - \operatorname{cotg}\alpha_1)(\cos \Delta s + \operatorname{tang}^2\delta)$$
$$+ \sin^2\varphi \cdot [\cos^2 \Delta s\,(\operatorname{cotg}\alpha_2 - \operatorname{cotg}\alpha_1)^2 + 2\sin^2 \Delta s \cdot \operatorname{cotg}\alpha_1 \cdot \operatorname{cotg}\alpha_2 + \operatorname{tang}^2\delta\,(\operatorname{cotg}^2\alpha_1 + \operatorname{cotg}^2\alpha_2 - 2\sin \Delta s \cdot \operatorname{cotg}\alpha_1 \cdot \operatorname{cotg}\alpha_2)]$$
$$+ \sin\varphi \cdot \sin \Delta s \cdot (\operatorname{cotg}\alpha_2 - \operatorname{cotg}\alpha_1) \cdot (\cos \Delta s \cdot \operatorname{cotg}\alpha_1 \cdot \operatorname{cotg}\alpha_2 - \operatorname{tang}^2\delta)$$
$$+ \sin^2 \Delta s \cdot \operatorname{cotg}^2\alpha_1 \cdot \operatorname{cotg}^2\alpha_2 - \operatorname{tang}^2\delta\,(\operatorname{cotg}^2\alpha_1 + \operatorname{cotg}^2\alpha_2 - 2\sin \Delta s \operatorname{cotg}\alpha_1 \cdot \operatorname{cotg}\alpha_2) = 0$$

Den allgemeinen Fall, wo zwei Sterne mit den Deklinationen δ_1 und δ_2 beobachtet sind, behandelt A. Wedemeyer (a. a. O.), dazu noch einige andere Spezialfälle. Außerdem macht er uns mit der Tatsache bekannt, daß der Münchener Th. Clausen in Crelles Journal der reinen und angewandten Mathematik, Berlin, Bd. 7, 1831, pag. 105, für das Pothenotsche Problem bereits eine Schlußgleichung 4. Grades gefunden hat, die er durch eine kubische Resolvente löste. Clausen empfiehlt die Methode für Beobachter, die nur mit einem Azimut-Theodoliten versehen sind.

In unseren Beiträgen zur nautischen Astronomie sind noch eine Anzahl hier nicht angeführter Fälle zur Bestimmung der Polhöhe behandelt, die aber fast stets auf sehr verwickelte Schlußgleichungen führen. Wie der Marokkanische Astronom Abul-Hassan († etwa 1250—1270) die Sonnenuhren dazu benutzte, um aus ihren Abmessungen die Breite des Ortes zu finden, für den sie ursprünglich konstruiert waren, ist ausführlich an vielen Beispielen auseinandergesetzt in des Verfassers schon erwähnter Abhandlung: Die geschichtliche Entwicklung der Polhöhenbestimmungen usw.

II. Abschnitt.

Anwendung der Hyperbelfunktionen zur Auflösung einiger Aufgaben der astronomischen Geographie.

Dazu bedarf es nur der allereinfachsten Kenntnisse über diese nützlichen analytischen Gebilde. Wir gehen aus von der Gleichung der gleichseitigen Hyperbel

$$x^2 - y^2 = 1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(I)}$$

Faßt man das Wesen der trigonometrischen Funktionen analytisch auf, so ist das Argument derselben die doppelte Sektorfläche des Kreises $x^2 + y^2 = r^2$ (Fig. 10). Es ist nämlich

$$\text{Sektor } BMD = 2\alpha \cdot \frac{r}{2} = \alpha \cdot r,$$

und wenn man $r = 1$ setzt, so ist im Kreise

$$x^2 + y^2 = 1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(II)}$$

$$\text{Sektor } MBD = \alpha.$$

Genau so wird das Argument ψ der Hyperbelfunktionen definiert als Flächeninhalt des schraffierten Doppelsektors MBD (Fig. 11) der gleichseitigen Hyperbel, und wie beim Kreise mit der Gleichung (II)

$$x = \cos\varphi, \quad y = \sin\varphi$$

ist, so hat man auch bei der gleichseitigen Hyperbel mit der Gleichung (I)

$$x = \mathfrak{Cof}\psi, \quad y = \mathfrak{Sin}\psi \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(III)}$$

so daß sie übergeht in

$$\mathfrak{Cof}^2\psi - \mathfrak{Sin}^2\psi = 1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(IV)}$$

Die Hyperbelgleichung (I) wird aber auch befriedigt durch die Substitutionen:

$$x = \frac{1}{\cos\chi}, \quad y = \operatorname{tang}\chi \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(V)}$$

so daß man den hyperbolischen Kosinus immer gleich einem reziproken zyklischen Kosinus, den hyperbolischen Sinus gleich einer trigonometrischen Tangens setzen kann. Aus

$$\mathfrak{Cof}\psi = \frac{1}{\cos\chi} \quad \text{und} \quad \mathfrak{Sin}\psi = \operatorname{tang}\chi \quad \ldots\ldots \quad \text{(VI)}$$

folgt, wenn man den Quotienten aus dem hyperbolischen Sinus und Kosinus gleich der hyperbolischen Tangens setzt

$$\mathfrak{Tang}\,\psi = \sin\chi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(VII)}$$

Nach dem Moivreschen Satze ist ferner (ψ beliebig)

$$e^{-i\psi} = \cos\psi - i\sin\psi = \cos\psi + \frac{1}{i}\sin\psi$$

$$\left.\begin{aligned}(e^{-i\psi})^{i} &= \cos i\psi + \frac{1}{i}\sin i\psi = e^{\psi}\\ (e^{-i\psi})^{-i} &= \cos i\psi - \frac{1}{i}\sin i\psi = e^{-\psi}\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(IX)}$$

Durch Multiplikation der Gleichungen (IX) folgt

$$e^{\psi}\cdot e^{-\psi} = e^{0} = 1 = \cos^2 i\psi - \left(\frac{1}{i}\sin i\psi\right)^2,$$

und dies mit (IV) verglichen, liefert

$$\left.\begin{aligned}\cos i\psi &= \mathfrak{Cof}\,\psi\\ \frac{1}{i}\sin i\psi &= \mathfrak{Sin}\,\psi\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(X)}$$

Mithin ist auch

$$\begin{aligned} e^{\psi} &= \mathfrak{Cof}\,\psi + \mathfrak{Sin}\,\psi\\ &= \frac{1}{\cos\chi} + \tan\chi\\ &= \frac{1+\sin\chi}{\cos\chi}. \end{aligned}$$

Nimmt man beiderseits die natürlichen Logarithmen, so wird

$$\begin{aligned} \psi &= l\frac{1+\sin\chi}{\cos\chi} = l\frac{1+\cos(90^0-\chi)}{\sin(90^0-\chi)}\\ &= l\frac{\cos^2\left(45^0-\frac{\chi}{2}\right)}{\sin\left(45^0-\frac{\chi}{2}\right)\cdot\cos\left(45^0-\frac{\chi}{2}\right)} = l\,\mathrm{cotg}\left(45^0-\frac{\chi}{2}\right)\\ &= l\,\mathrm{tang}\left(45^0+\frac{\chi}{2}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(XI)} \end{aligned}$$

In diesen wenigen Formeln in Verbindung mit der Tatsache, daß die prosthaphäretischen Regeln bei den Hyperbelfunktionen genau so gelten wie in der gewöhnlichen Trigonometrie, was jedes Lehrbuch der hyperbolischen Funktionen beweist, hat man alles, was zur Lösung der hier vorgetragenen Aufgaben erforderlich ist.

18. Aufgabe. Gegeben ist die Höhe eines Sterns $= h$, seine Deklination $= \delta$ und der Stundenwinkel $= s$; gesucht ist die Polhöhe φ des Beobachtungsortes.

Die direkte Auflösung des Kosinussatzes

$$\sin h = \sin\delta \cdot \sin\varphi + \cos\delta \cdot \cos\varphi \cdot \cos s \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (I)$$

nach der Unbekannten φ liefert eine quadratische Gleichung mit unlogarithmischer Schlußformel. Diese wurde im praktischen Gebrauch stets umgangen, indem man sich entweder einer Reihenentwickelung bediente oder folgende Substitution anwandte:

$$\sin\delta = M \cdot \sin N$$
$$\cos\delta \cdot \cos s = M \cdot \cos N,$$

womit (I) übergeht in

$$\sin h = M \cdot \cos(\varphi - N),$$

also folgt

$$\cos(\varphi - N) = \frac{M}{\sin h} \quad \text{(Brünnow a. a. O. pag. 270).}$$

Auf ein ebenso elegantes Resultat wie das letztere führt die Verwendung der Hyperbelfunktionen. Es läßt sich Gleichung (I) auch so schreiben:

$$\frac{\sin h}{\sin\delta} = \sin\varphi + \operatorname{cotg}\delta \cdot \cos s \cdot \cos\varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (II)$$

Hat der Stern eine beträchtliche Deklination, ist aber die Höhe h nicht sehr groß, so wird $\frac{\sin h}{\sin\delta} < 1$ und kann dann einer hyperbolischen Tangens, also $= \mathfrak{Tang}\,\psi_0$ gesetzt werden. Ferner setzen wir gemäß (VI)

$$\sin\varphi = \mathfrak{Tang}\,\psi, \quad \cos\varphi = \frac{1}{\mathfrak{Cof}\,\psi},$$

womit aus (II) wird:

$$\mathfrak{Tang}\,\psi_0 = \mathfrak{Tang}\,\psi + \frac{\operatorname{cotg}\delta \cdot \cos s}{\mathfrak{Cof}\,\psi}.$$

Nun ist weiter

$$\mathfrak{Tang}\,\psi_0 - \mathfrak{Tang}\,\psi = \frac{\operatorname{cotg}\delta \cdot \cos s}{\mathfrak{Cof}\,\psi}$$

$$\frac{\mathfrak{Sin}(\psi_0 - \psi)}{\mathfrak{Cof}\,\psi_0 \cdot \mathfrak{Cof}\,\psi} = \frac{\operatorname{cotg}\delta \cdot \cos s}{\mathfrak{Cof}\,\psi}$$

$$\mathfrak{Sin}(\psi_0 - \psi) = \operatorname{cotg}\delta \cdot \cos s \cdot \mathfrak{Cof}\,\psi_0 = m$$

$$\psi_0 - \psi = n$$

$$\psi = \psi_0 - n = \gamma = l\,\mathrm{tang}\left(45^0 + \frac{\varphi}{2}\right),$$

woraus φ gefunden werden kann.

19. Aufgabe. Gegeben sei die Höhe h, der Stundenwinkel s und die Breite φ des Beobachtungsortes; gesucht ist die Deklination δ.

Wiederum ist

$$\sin h = \sin\delta \cdot \sin\varphi + \cos\delta \cdot \cos\varphi \cdot \cos s \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (I)$$

oder

$$\frac{\sin h}{\sin\varphi} = \sin\delta + \cos\delta \cdot \cos s \cdot \operatorname{cotg}\varphi$$

Wenn $\varphi > h$, so darf gesetzt werden:

$$\frac{\sin h}{\sin \varphi} = \mathfrak{Tang} k_0; \quad \sin \delta = \mathfrak{Tang} k; \quad \cos \delta = \frac{1}{\mathfrak{Cof} k}$$

Dann wird aus (I): $\mathfrak{Tang} k_0 - \mathfrak{Tang} k = \dfrac{\operatorname{cotg} \varphi \cdot \cos s}{\mathfrak{Cof} k}$

$$\mathfrak{Sin}(k_0 - k) = \cos s \cdot \operatorname{cotg} \varphi \cdot \mathfrak{Cof} k_0$$

$$k_0 - k = n \quad \text{usw.}$$

20. Aufgabe. Gegeben die Deklination δ, die Polhöhe φ und der Stundenwinkel s, gesucht die Höhe h.

Dieselbe in der hier vorgetragenen eleganten Weise gelöst zu haben, ist das Verdienst Lamberts. (Vgl. dessen Observations trigonometriques, pag. 327—354 in dem Bande: Histoire de l'académie royale des Sciences et belles lettres, Berlin, 1768). Zunächst ist

$$\sin h = \sin \delta \cdot \sin \varphi + \cos \delta \cdot \cos \varphi \cdot \cos s \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(I)}$$

$$0 = \sin \delta \cdot \sin \varphi + \cos \delta \cdot \cos \varphi \cdot \cos s_0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(II)}$$

wo s_0 der uns schon aus Aufgabe (I) bekannte halbe Tagbogen ist. Subtrahiert man (II) von (I), so bleibt

$$\sin h = \cos \delta \cdot \cos \varphi \,[\cos s - \cos s_0] = 2 \cdot \cos \delta \cdot \cos \varphi \cdot \sin \frac{s_0 + s}{2} \cdot \sin \frac{s_0 - s}{2} \quad \text{(III)}$$

Falls aber der Stern oder die Sonne zirkumpolar ist, was stattfindet, wenn $\delta > 90^0 - \varphi$ wird, so wird s_0 imaginär, also (III) unbrauchbar. Aber man kann auch für diesen Fall eine der Formel (III) ganz analoge erhalten, wenn man zuerst für (I) schreibt

$$\sin h = \cos \delta \cdot \cos \varphi \,[\cos s + \operatorname{tang} \varphi \cdot \operatorname{tang} \delta].$$

Da nun eben bei Zirkumpolarsternen oder bei Mitternachtssonne $\operatorname{tang} \varphi \cdot \operatorname{tang} \delta > 1$ und deshalb s_0 imaginär wird, so setze man diesen Ausdruck gleich einem hyperbolischen Sinus, der ja, wie die Abszisse x einer Hyperbel, alle Werte von 0 bis $\pm \infty$ annehmen kann. Man darf also schreiben

$$\sin h = \cos \delta \cdot \cos \varphi \cdot [\mathfrak{Sin} \alpha + \mathfrak{Sin} \beta] = 2 \cdot \cos \delta \cdot \cos \varphi \cdot \mathfrak{Sin} \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \mathfrak{Cof} \frac{\alpha - \beta}{2} \quad \text{(IV)}$$

wo also $\cos s = \mathfrak{Sin} \alpha$ gesetzt ward.

Wir bemerken hierzu, daß Lambert (a. a. O.) auch den Kotangentensatz vermittels der Hyperbelfunktionen logarithmisch umgestaltet hat, wenn es sich darum handelt, aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel eines sphärischen Dreiecks den einer der gegebenen Seiten gegenüberliegenden Winkel zu berechnen.

21. Aufgabe. Gegeben die Polhöhe φ eines Ortes, die Deklination δ und die Höhe h eines Gestirns; gesucht der Stundenwinkel s.

Aus $\sin h = \sin \delta \cdot \sin \varphi + \cos \delta \cdot \cos \varphi \cdot \cos s$ folgt

$$\cos s = \frac{\sin h - \sin\delta \cdot \sin\varphi}{\cos\delta \cdot \cos\varphi} = \frac{\sin h}{\cos\delta \cdot \cos\varphi} - \operatorname{tang}\delta \cdot \operatorname{tang}\varphi$$

Da rechts sowohl der Minuend als auch der Subtrahend alle Werte annehmen können, so setzen wir jeden einem hyperbolischen Sinus gleich, also

$$\frac{\sin h}{\cos\varphi \cdot \cos\delta} = \mathfrak{Sin}\,\alpha; \quad \operatorname{tang}\delta \cdot \operatorname{tang}\varphi = \mathfrak{Sin}\,\beta \text{ und erhalten:}$$

$$\cos s = \mathfrak{Sin}\,\alpha - \mathfrak{Sin}\,\beta = 2\,\mathfrak{Sin}\frac{\alpha-\beta}{2} \cdot \mathfrak{Cof}\frac{\alpha+\beta}{2}$$

Es bedarf hier kaum der Erwähnung, daß man in diesem Falle auch eine logarithmische Endformel dadurch erzielt hätte, daß man statt der hyperbolischen Sinus trigonometrische Tangenten einführte.

22. Aufgabe. Man hat die gleichzeitigen Höhen h_1 und h_2 zweier bekannten Sterne gemessen; daraus die Breite des Beobachtungsortes zu bestimmen.

In dieser Formulierung ist die Aufgabe inhaltlich identisch mit No. 16 des I. Abschnitts (Gauß). Ersetzt man aber die beiden Sterne durch einen, den man dann in der bekannten Zwischenzeit zweimal beobachten muß, so liegt die Douwessche Aufgabe vor. Mit Hilfe der Hyperbelfunktionen hat der französische Geometer Yvon Villarceau eine sehr elegante Lösung gegeben. (Vgl. dessen Nouvelle Navigation astronomique, Paris 1877, pag. 172ff.) Da dieselbe anscheinend kaum gekannt ist, so geben wir sie hier ausführlich wieder.

Es habe der Widderpunkt den unbekannten Stundenwinkel s; Rektaszension und Deklination des ersten Sternes seien s_1 und δ_1, dieselben Daten für den zweiten Stern mögen mit s_2 und δ_2 bezeichnet werden. Dann ist der Stundenwinkel des ersten Sterns $= s - s_1$, jener des zweiten $= s - s_2$. Man hat also zur Bestimmung von φ folgende zwei Gleichungen:

$$\sin h_1 = \sin\delta_1 \cdot \sin\varphi + \cos\delta_1 \cdot \cos\varphi \cdot \cos(s - s_1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(I)}$$

$$\sin h_2 = \sin\delta_2 \cdot \sin\varphi + \cos\delta_2 \cdot \cos\varphi \cdot \cos(s - s_2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(II)}$$

Wir setzen analog wie früher

$$\sin\varphi = \mathfrak{Tang}\,\psi; \quad \cos\varphi = \frac{1}{\mathfrak{Cof}\,\psi}$$

und erhalten damit aus (I) und (II):

$$\sin h_1 \cdot \mathfrak{Cof}\,\psi - \sin\delta_1 \cdot \mathfrak{Sin}\,\psi = \cos\delta_1 (\cos s \cdot \cos s_1 + \sin s \cdot \sin s_1)$$

$$\sin h_2 \cdot \mathfrak{Cof}\,\psi - \sin\delta_2 \cdot \mathfrak{Sin}\,\psi = \cos\delta_2 (\cos s \cdot \cos s_2 + \sin s \cdot \sin s_2),$$

welche Zeilen man mit den Abkürzungen

$$\sin h_1 = e\,; \quad \sin\delta_1 = c\,; \quad \cos\delta_1 \cdot \cos s_1 = a\,; \quad \cos\delta_1 \cdot \sin s_1 = b,$$

$$\sin h_2 = e'; \quad \sin\delta_2 = c'; \quad \cos\delta_2 \cdot \cos s_2 = a'; \quad \cos\delta_2 \cdot \sin s_2 = b'$$

auch so schreiben kann.

$$\left.\begin{aligned} e \cdot \mathfrak{Cof}\,\psi - c \cdot \mathfrak{Sin}\,\psi &= a \cdot \cos s + b \cdot \sin s \\ e' \cdot \mathfrak{Cof}\,\psi - c' \cdot \mathfrak{Sin}\,\psi &= a' \cdot \cos s + b' \cdot \sin s \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(III)}$$

Jetzt handelt es sich um die Elimination der Unbekannten s. Dazu multipliziere man erst die erste Gleichung (III) mit a', die zweite mit a und subtrahiere, dann multipliziere man die erste mit b', die zweite mit b und subtrahiere wieder. Dies führt zu folgenden zwei neuen Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}(ea'-ae')\cdot\mathfrak{Cof}\,\psi+(ca'-ac')\cdot\mathfrak{Sin}\,\psi&=(ba'-ab')\cdot\sin s\\ -(eb'-be')\cdot\mathfrak{Cof}\,\psi+(cb'-bc')\cdot\mathfrak{Sin}\,\psi&=(ba'-ab')\cdot\cos s\end{aligned}\right\}\quad\text{(IV)}$$

oder durch Abkürzungen vereinfacht:

$$\left.\begin{aligned}\alpha\cdot\mathfrak{Cof}\,\psi+B\cdot\mathfrak{Sin}\,\psi&=C\cdot\sin s\\ -\beta\cdot\mathfrak{Cof}\,\psi+A\cdot\mathfrak{Sin}\,\psi&=C\cdot\cos s\end{aligned}\right\}\quad\text{(V)}$$

Wir quadrieren und addieren beide Seiten von (V). Das gibt

$$(\alpha^2+\beta^2)\cdot\mathfrak{Cof}^2\psi-2(A\beta-B\alpha)\cdot\mathfrak{Sin}\,\psi\cdot\mathfrak{Cof}\,\psi+(A^2+B^2)\mathfrak{Sin}^2\psi=C^2\quad\text{(VI)}$$

welche Gleichung nur noch die eine Unbekannte ψ allein enthält. Um jetzt auf den doppelten Winkel 2ψ überzugehen, addieren wir erst links und rechts A^2+B^2 und erhalten:

$$(\alpha^2+\beta^2)\mathfrak{Cof}^2\psi-(A\beta-B\alpha)\mathfrak{Sin}2\psi+(A^2+B^2)(1+\mathfrak{Sin}^2\psi)=A^2+B^2+C^2\quad\text{(VII)}$$

Nun ist aber vermöge der Fundamentalrelation: $\mathfrak{Cof}^2\psi-\mathfrak{Sin}^2\psi=1$

$$\mathfrak{Cof}^2\psi=1+\mathfrak{Sin}^2\psi,$$
$$\mathfrak{Sin}^2\psi=\mathfrak{Cof}^2\psi-1$$

Also wird (VII) zu

$$(\alpha^2+\beta^2)\mathfrak{Cof}^2\psi-(A\beta-B\alpha)\cdot\mathfrak{Sin}2\psi+(A^2+B^2)\mathfrak{Cof}^2\psi=A^2+B^2+C^2\quad\text{(VIII)}$$

Ferner subtrahieren wir von (VI) links und rechts $\alpha^2+\beta^2$, womit folgt:

$$(\alpha^2+\beta^2)(\mathfrak{Cof}^2\psi-1)-(A\beta-B\alpha)\ \mathfrak{Sin}2\psi+(A^2+B^2)\mathfrak{Sin}^2\psi=C^2-\alpha^2-\beta^2,$$
$$(\alpha^2+\beta^2)\ \mathfrak{Sin}^2\psi\quad-(A\beta-B\alpha)\cdot\mathfrak{Sin}2\psi+(A^2+B^2)\mathfrak{Sin}^2\psi=C^2-\alpha^2-\beta^2\quad\text{(IX)}$$

indem A^2+B^2 rechter Hand mit $(A^2+B^2)\mathfrak{Cof}^2\psi$ linker Hand vereinigt ward.

Addieren wir endlich (VIII) und (IX), so findet sich

$$(\alpha^2+\beta^2+A^2+B^2)(\mathfrak{Cof}^2\psi+\mathfrak{Sin}^2\psi)-2(A\beta-B\alpha)\mathfrak{Sin}2\psi$$
$$=2C^2+A^2+B^2-\alpha^2-\beta^2$$

Und da $\mathfrak{Cof}^2\psi+\mathfrak{Sin}^2\psi=\mathfrak{Cof}2\psi$ [1])

$$(\alpha^2+\beta^2+A^2+B^2)\cdot\mathfrak{Cof}2\psi-2(A\beta-B\alpha)\mathfrak{Sin}2\psi=2C^2+A^2+B^2-\alpha^2-\beta^2\quad\text{(X)}$$

Indem man jetzt noch $\left.\begin{aligned}k\cdot\mathfrak{Sin}2\psi_0&=2(A\beta-B\alpha)\\ k\cdot\mathfrak{Cof}2\psi_0&=\alpha^2+\beta^2+A^2+B^2\end{aligned}\right\}$ (XI)

setzt, folgt als Endgleichung

$$k\cdot\mathfrak{Cof}2(\psi-\psi_0)=2C^2+A^2+B^2-\alpha^2-\beta^2\quad\text{(XII)}$$

---

[1]) Es ist $e^{\psi}=\mathfrak{Cof}\,\psi+\mathfrak{Sin}\,\psi$; $e^{-\psi}=\mathfrak{Cof}\,\psi-\mathfrak{Sin}\psi$; hieraus durch Division: $e^{2\psi}=\frac{\mathfrak{Cof}\,\psi+\mathfrak{Sin}\,\psi}{\mathfrak{Cof}\,\psi-\mathfrak{Sin}\,\psi}=\frac{(\mathfrak{Cof}\,\psi+\mathfrak{Sin}\,\psi)^2}{\mathfrak{Cof}^2\psi-\mathfrak{Sin}^2\psi}=(\mathfrak{Cof}\,\psi+\mathfrak{Sin}\,\psi)^2=\mathfrak{Cof}^2\psi+2\,\mathfrak{Sin}\psi\cdot\mathfrak{Cof}\psi+\mathfrak{Sin}^2\psi=\mathfrak{Cof}^2\psi+\mathfrak{Sin}^2\psi+\mathfrak{Sin}2\psi$. Und da $e^{2\psi}=\mathfrak{Cof}2\psi+\mathfrak{Sin}2\psi$ ist, so folgt $\mathfrak{Cof}^2\psi+\mathfrak{Sin}^2\psi=\mathfrak{Cof}2\psi$.

Die Aufgabe ist gelöst, sobald noch k und ψ_0 näher bestimmt sind. Subtrahiert man dazu die erste der quadrierten Gleichungen (XI) von der zweiten, so ist

$$k^2 = (\alpha^2 + \beta^2 + A^2 + B^2)^2 - 4(A\beta - B\alpha)^2,$$

da ja $\mathfrak{Cof}^2 2\psi - \mathfrak{Sin}^2 2\psi = 1$ ist.

Nun läßt sich die zweite der Gleichungen (XI) auch so schreiben

$$k \cdot \mathfrak{Cof} 2\psi_0 = (A + \beta)^2 + (B - \alpha)^2 - 2(A\beta - B\alpha) \quad . \quad . \quad . \quad \text{(XIII)}$$

Erheben wir (XIII) ins Quadrat und subtrahieren davon die quadrierte (XI_1), so findet sich leicht

$$\begin{aligned} k^2 &= [(A^2 + \beta^2) + (B - \alpha)^2]^2 - 4 \cdot [(A + \beta)^2 + (B - \alpha)^2] \cdot (A\beta - B\alpha) \\ &= [(A + \beta)^2 + (B - \alpha)^2] \cdot [(A + \beta)^2 + (B - \alpha)^2 - 4A\beta + 4B\alpha] \\ &= [(A + \beta)^2 + (B - \alpha)^2] \cdot [(A - \beta)^2 + (B + \alpha)^2], \end{aligned}$$

und nach sofort verständlicher Vereinfachung.

$$k = P \cdot Q,$$

welcher Ausdruck notwendig positiv sein muß wegen der 2. Gleichung des Systems (XI). Durch Addition des Gleichungspaares (XI) folgt

$$k \cdot e^{2\psi_0} = (A + \beta)^2 + (B - \alpha)^2 = P^2$$

$$e^{2\psi_0} = \frac{P^2}{k} = \frac{P^2}{P \cdot Q} = \frac{P}{Q}$$

$$2\psi_0 = l\frac{P}{Q},$$

$$\psi_0 = l\sqrt{\frac{P}{Q}}$$

Damit ist die Aufgabe in allen Teilen gelöst.

Indessen sind nur eine beschränkte Anzahl Aufgaben für eine wirklich vorteilhafte Anwendung der Hyperbelfunktionen geeignet. Einige der hier vorgetragenen Beispiele stammen aus dem trefflichen Buche von S. Günther: „Die Lehre von den gewöhnlichen und verallgemeinerten Hyperbelfunktionen", 1881, Halle a. S. (pag. 194ff.); dieselben Beispiele finden sich reproduziert bei Huebner: „Ebene und räumliche Geometrie des Maßes", 1888, Leipzig (pag. 262ff.).

Für die numerische Durchrechnung der Beispiele bedarf man eigens dazu hergestellter Tafelwerke. Am häufigsten gebraucht werden in der Praxis die Tafeln des italienischen Mathematikers Forti (Tavole de 'numeri e delle funzioni circolari et iperboliche precedute dalla storia et teoria delle iperboliche, da applicazioni e da altre tavole ad uso frequente, Parte I, Torino—Firenze—Milano, 1870). Wir nennen ferner W. Gronau: Tafeln für die hyperbolischen Sektoren und für die Logarithmen ihrer Sinus und Kosinus, Danzig, 1865, sowie die Tafeln Lamberts, die er seinen schon erwähnten Observations trigonométriques hinzufügte. Wir setzen ein Spezimen derselben hierher, freilich unter Reduktion der sieben Stellen auf vier. Mittels derselben werden wir die numerische Berechung zweier Beispiele durchführen.

Sektor ψ	Sin ψ	Cos ψ	Sektor ψ	Sin ψ	Cos ψ
0.0076	0.0175	1.0002	0.3936	1.0355	1.4396
0.0152	0.0349	1.0006	0.4046	1.0724	1.4663
0.0227	0.0524	1.0014	0.4158	1.1106	1.4945
0.0303	0.0699	1.0024	0.4273	1.1504	1.5243
0.0379	0.0875	1.0038	0.4389	1.1918	1.5557
0.0456	0.1051	1.0055	0.4509	1.2349	1.5890
0.0532	0.1228	1.0075	0.4630	1.2799	1.6243
0.0608	0.1405	1.0098	0.4755	1.3270	1.6616
0.0685	0.1584	1.0125	0.4882	1.3764	1.7013
0.0762	0.1763	1.0154	0.5013	1.4281	1.7434
0.0839	0.1944	1.0187	0.5147	1.4826	1.7883
0.0916	0.2126	1.0223	0.5284	1.5399	1.8361
0.0994	0.2309	1.0263	0.5425	1.6003	1.8871
0.1072	0.2493	1.0306	0.5570	1.6643	1.9416
0.1150	0.2679	1.0353	0.5719	1.7321	2.0000
0.1229	0.2867	1.0403	0.5873	1.8040	2.0627
0.1308	0.3057	1.0457	0.6032	1.8807	2.1301
0.1387	0.3249	1.0515	0.6296	1.9626	2.2027
0.1467	0.3443	1.0576	0.6366	2.0503	2.2812
0.1548	0.3640	1.0642	0.6542	2.1445	2.3662
0.1629	0.3839	1.0711	0.6725	2.2460	2.4586
0.1710	0.4040	1.0785	0.6915	2.3558	2.5593
0.1792	0.4245	1.0864	0.7113	2.4751	2.6695
0.1875	0.4452	1.0946	0.7320	2.6051	2.7904
0.1958	0.4663	1.1034	0.7537	2.7475	2.9238
0.2042	0.4877	1.1126	0.7764	2.9042	3.0716
0.2127	0.5095	1.1223	0.8003	3.0777	3.2361
0.2212	0.5317	1.1326	0.8255	3.2709	3.4203
0.2299	0.5543	1.1434	0.8522	3.4874	3.6280
0.2386	0.5774	1.1547	0.8806	3.7321	3.8637
0.2474	0.6009	1.1666	0.9109	4.0108	4.1336
0.2562	0.6249	1.1792	0.9433	4.3315	4.4454
0.2652	0.6494	1.1924	0.9784	4.7046	4.8097
0.2743	0.6745	1.2062	1.0164	5.1446	5.2408
0.2835	0.7002	1.2208	1.0580	5.6713	5.7588
0.2928	0.7265	1.2361	1.1040	6.3138	6.3925
0.3023	0.7536	1.2521	1.1554	7.1154	7.1853
0.3118	0.7813	1.2690	1.2135	8.1443	8.2055
0.3215	0.8098	1.2868	1.2809	9.5144	9.5668
0.3313	0.8391	1.3054	1.3599	11.4301	11.4737
0.3413	0.8693	1.3250	1.4569	14.3007	14.3356
0.3514	0.9004	1.3456	1.5819	19.0811	19.1073
0.3617	0.9325	1.3673	1.7581	28.6363	28.6537
0.3721	0.9657	1.3902	2.0591	57.2900	57.2987
0.3828	1.0000	1.4142	∞	∞	∞

Zahlenbeispiel zu No. 18: Es sei $\delta = 45^0$; $h = 30^0$; $s = 60^0$; gesucht φ.

$$\frac{\sin h}{\sin \delta} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \mathfrak{Tang}\,\psi_0$$

$$\mathfrak{Sin}\,\psi_0 = \frac{\mathfrak{Tang}\,\psi_0}{\sqrt{1 - \mathfrak{Tang}^2\psi_0}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = 1$$

$$\psi_0 = 0.3828; \quad \mathfrak{Cof}\,\psi_0 = 1.4142 = \sqrt{2}$$

$$\mathfrak{Sin}\,(\psi_0 - \psi) = \cos s \cdot \operatorname{cotg}\delta \cdot \mathfrak{Cof}\,\psi_0$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\psi_0 - \psi = 0.2835$$

$$\psi = 0.3828 - 0.2835 = 0.0993$$

$$\psi = l\,\mathrm{tang}\left(45^0 + \frac{\varphi}{2}\right)$$

$$e^{\psi} = \mathrm{tang}\left(45^0 + \frac{\varphi}{2}\right) = \mathfrak{Cof}\,\psi + \mathfrak{Sin}\,\psi = 1{,}0263 + 0.2309$$

$$\mathrm{tang}\left(45^0 + \frac{\varphi}{2}\right) = 1{,}2572$$

$$45^0 + \frac{\varphi}{2} = 51^0\,30'$$

$$\varphi = 13^0$$

Zahlenbeispiel zu No. 20: Es sei $\delta = 23\frac{1}{2}^0$; $\varphi = 71^0$; $s = 60^0$; gesucht h

$$\sin h = \cos\delta \cdot \cos\varphi\,[\cos s + \tan\delta \cdot \tan\varphi] = 2\cos\delta \cdot \cos\varphi \cdot \mathfrak{Sin}\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \mathfrak{Cof}\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos s = \tfrac{1}{2} = \mathfrak{Sin}\,\alpha; \quad \tan\delta \cdot \tan\varphi = \mathfrak{Sin}\,\beta = 1.270$$

$$\alpha = 0.21; \quad \beta = 0.46 \text{ (abgerundet)}$$

$$\sin h = 2.0{,}3 \cdot \mathfrak{Sin}0{,}34 \cdot \mathfrak{Cof}(-0{,}12)$$

$$\mathfrak{Sin}0{,}34 = 0{,}866; \quad \mathfrak{Cof}(-0{,}12) = \mathfrak{Cof}0{,}12 = 1{,}04$$

$$\sin h = 0{,}6 \cdot 0{,}866 \cdot 1{,}04 = 0.53664$$

$$h = 32^0\,30'$$

III. Abschnitt.

Sphärische Maxima und Minima.

23. Aufgabe. In einem Orte der Breite φ will man sich am längsten Tage um 3 Uhr nachmittags aus dem Sonnenstande angenähert über die Himmelsrichtungen orientieren und nimmt demgemäß an, die Sonne stehe gerade im Süd-Westen.

1. Wie groß ist der Fehler in dieser Orientierung?
2. Um welche Tageszeit würde dieser durch Verwechslung von Azimut und Stundenwinkel entstandene Fehler ein Maximum sein?

(Zuerst gestellt von H. Michnik in der Zeitschr. f. mathem.-naturwissensch. Unterricht, 1900, Bd. 31, sodann 1908 für die Kandidaten des 1. bayer. Staatsexamens; Lösung dazu von K. Hoffmann und J. Schulz in „Lösungen zu den mathematischen Lehramtsaufgaben", I. Teil: Ebene und sphärische Trigonometrie, München 1909.)

Um Frage 1. zu beantworten, schreiben wir den Kotangentensatz für das sphärische Dreieck Zenit — Pol — Sonne auf, in welchem man kennt:

$$s = 45^0; \quad \delta = \varepsilon \text{ (Ekliptikschiefe) und die Breite } \varphi.$$

Dann findet man das Azimut α aus

$$\cos s \cdot \sin\varphi = \cos\varphi \cdot \operatorname{tang}\varepsilon + \sin s \cdot \operatorname{cotg}\alpha$$

zu

$$\operatorname{cotg}\alpha = \frac{\cos s \cdot \sin\varphi - \cos\varphi \cdot \operatorname{tang}\varepsilon}{\sin s} \quad \ldots\ldots \quad (I)$$

$$= \sin\varphi - \cos\varphi \operatorname{tang}\varepsilon\sqrt{2},$$

welch letzterer Ausdruck leicht logarithmisch zu machen ist. Sei ξ der Orientierungsfehler, so ist

$$\xi = \alpha - s^{1}) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (II)$$

Für $\varphi = 48^0 8'$ (Breite von München) und $\varepsilon = 23^0 27'$ ergibt sich $\xi = 26^0 27' 51''$.

---

[1]) Nicht $\xi = s - \alpha$, wie in der genannten Lösung von Hoffmann u. Schulz sich findet. Denn so wird ξ negativ, solange $\delta > 0$ und $s < 90^0$. Schreibt man nämlich (I) so: $\operatorname{cotg}\alpha = \sin\varphi \cdot \operatorname{cotg} s - \frac{\cos\varphi \cdot \operatorname{tang}\delta}{\sin s}$, so hat unter den gegebenen Bedingungen der Bruch rechter Hand einen positiven Wert; es muß also $\sin\varphi \cdot \operatorname{cotg} s > \operatorname{cotg}\alpha$ sein. Da aber $\sin\varphi$ für alle Breiten ein echter Bruch ist, so ist erst recht $\operatorname{cotg} s > \operatorname{cotg}\alpha$, d. h. $s < \alpha$.

Die Beantwortung der 2. Frage gestaltet sich folgendermaßen: Soll die Größe ξ ein Maximum werden, so ist α nach (II) von ihr abhängig durch die Gleichung

$$\alpha = s + \xi.$$

Setzt man diesen Wert von α in (I) ein, so bekommt man

$$\cos s \cdot \sin\varphi = \cos\varphi \cdot \operatorname{tang}\varepsilon + \sin s \cdot \operatorname{cotg}(s+\xi) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(III)}$$

Diese Gleichung repräsentiert eine funktionale Beziehung zwischen s und ξ, so daß man auch schreiben kann

$$f(s, \xi) = \cos s \cdot \sin\varphi - \cos\varphi \cdot \operatorname{tang}\varepsilon - \sin s \cdot \operatorname{cotg}(s+\xi) = 0 \quad . \quad . \quad \text{(IV)}$$

Soll ξ ein Maximum werden, so muß $\frac{d\xi}{ds} = 0$ sein. Es ist aber nach (IV):

$$\frac{\delta f}{\delta s} + \frac{\delta f}{\delta \xi} \cdot \frac{d\xi}{ds} = 0.$$

Da aber $\frac{d\xi}{ds} = 0$ werden muß, so ist die Bedingung für das Maximum

$$\frac{\delta f}{\delta s} = 0$$

Für $\frac{\delta f}{\delta s}$ findet man aus (IV):

$$\frac{\delta f}{\delta s} = -\sin\varphi \cdot \sin s - \left[\frac{\sin s}{\sin^2(s+\xi)}\left(1 + \frac{d\xi}{ds}\right) + \cos s \cdot \operatorname{cotg}(s+\xi)\right] = 0. \quad \text{(V)}$$

Und da $\frac{d\xi}{ds}$ der Null gleich sein muß, so hat man aus (V):

$$\sin\varphi \cdot \sin s - \frac{\sin s}{\sin^2(s+\xi)} + \cos s \cdot \operatorname{cotg}(s+\xi) = 0$$

oder

$$\sin\varphi \cdot \sin s - \sin s(1 + \operatorname{cotg}^2(s+\xi)) + \cos s \cdot \operatorname{cotg}(s+\xi) = 0 \quad . \quad \text{(VI)}$$

Eliminiert man zwischen (IV) und (VI) cotg $(s+\xi)$, so erhält man eine Gleichung mit der Unbekannten s, deren Ausrechnung die Beantwortung der Frage (2) darstellt. Aus (IV) folgt

$$\operatorname{cotg}(s+\xi) = \frac{\sin\varphi \cdot \cos s - \cos\varphi \cdot \operatorname{tang}\varepsilon}{\sin s},$$

und dies in (VI) eingesetzt:

$$\sin\varphi \cdot \sin s - \sin s\left[1 + \frac{(\sin\varphi \cdot \cos s - \cos\varphi \cdot \operatorname{tang}\varepsilon)^2}{\sin^2 s}\right]$$

$$+ \operatorname{cotg} s(\sin\varphi \cos s - \cos\varphi \operatorname{tang}\varepsilon) = 0$$

Die weitere Auflösung dieser Gleichung gibt

$$-\left[1+\frac{(\sin\varphi\cdot\cos s-\cos\varphi\cdot\operatorname{tang}\varepsilon)^2}{\sin^2 s}\right]=\frac{\operatorname{cotg} s}{\sin s}(\cos\varphi\cdot\operatorname{tang}\varepsilon-\cos s\cdot\sin\varphi)-\sin\varphi$$

$$1+\frac{(\sin\varphi\cdot\cos s-\cos\varphi\operatorname{tang}\varepsilon)^2}{1-\cos^2 s}=\frac{\cos s}{1-\cos^2 s}(\sin\varphi\cdot\cos s-\cos\varphi\operatorname{tang}\varepsilon)+\sin\varphi$$

$$-\cos^2 s+1+\sin^2\varphi\cos^2 s-2\sin\varphi\cos\varphi\cdot\cos s\cdot\operatorname{tang}\varepsilon+\cos^2\varphi\operatorname{tang}^2\varepsilon$$
$$=-\cos\varphi\operatorname{tang}\varepsilon\cos s+\sin\varphi$$

$$-\cos^2\varphi\cdot\cos^2 s-\cos s[\cos\varphi\operatorname{tang}\varepsilon(2\sin\varphi-1)]=\sin\varphi-\cos^2\varphi\operatorname{tang}^2\varepsilon-1$$

$$\cos^2 s+\cos s\cdot\operatorname{tang}\varepsilon\cdot\frac{2\sin\varphi-1}{\cos\varphi}=\frac{1-\sin\varphi}{\cos^2\varphi}+\operatorname{tang}^2\varepsilon$$

$$\cos s+\frac{\operatorname{tang}\varepsilon(2\sin\varphi-1)}{2\cos\varphi}=\pm\frac{\sqrt{4(1-\sin\varphi)+4\operatorname{tang}^2\varepsilon\cos^2\varphi+(2\sin\varphi-1)^2\cdot\operatorname{tang}^2\varepsilon}}{2\cos\varphi}$$

$$=\pm\frac{\sqrt{5\operatorname{tang}^2\varepsilon-4\sin\varphi(1+\operatorname{tang}^2\varepsilon)+4\dfrac{\cos^2\varepsilon}{\cos^2\varepsilon}}}{2\cos\varphi}$$

$$=\pm\frac{\sqrt{5\sin^2\varepsilon+4(\cos^2\varepsilon-\sin\varphi)}}{2\cos\varepsilon\cdot\cos\varphi}$$

$$\cos s=\frac{-\sin\varepsilon(2\sin\varphi-1)\pm\sqrt{5\sin^2\varepsilon+4(\cos^2\varepsilon-\sin\varphi)}}{2\cos\varphi\cdot\cos\varepsilon}$$

Nur das positive Vorzeichen der Quadratwurzel liefert den reellen Wert

$$\cos s=0.72788,$$

und damit

$$s=43^0 17' 27'',$$
$$t=2^h\,53^m\,10^s.$$

Der zweite Wert von $\cos s$ ist unbrauchbar.

24. Aufgabe. Wann ist der Unterschied zwischen der Länge und der Rektaszension der Sonne ein Maximum? (Gestellt von H. Michnik a. a. O., 1899, Bd. 30.)

Aus dem rechtwinkligen Dreieck ΥRS (Fig. 12) hat man

$$\cos l=\cos r\cdot\cos\delta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(I)}$$

$$\sin\delta=\sin\varepsilon\cdot\sin l \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(II)}$$

und es soll $\xi=l-r$ ein Maximum werden. Setzt man $r=l-\xi$ in Gleichung (I) ein, so wird sie:

$$\cos l-\cos(l-\xi)\cdot\cos\delta=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(III)}$$

und falls man $\cos\delta$ aus (II) noch ersetzt durch $\sqrt{1-\sin^2\varepsilon\cdot\sin^2 l}$:

$$\cos l-\cos(l-\xi)\cdot\sqrt{1-\sin^2\varepsilon\cdot\sin^2 l}=f(l,\xi)=0 \quad . \quad . \quad . \quad \text{(IV)}$$

Durch Differentiation von (III) folgt:

$$\frac{\delta f}{\delta l}+\frac{\delta f}{\delta \xi}\cdot\frac{d\xi}{dl}=0$$

Und da, wie in der vorhergehenden Aufgabe $\frac{d\xi}{dl}=0$ sein muß, so erhalten wir als Bedingung des Maximums für ξ den Ausdruck

$$-\sin l+\frac{\sin^2\varepsilon\cdot\sin l\cdot\cos l\cdot\cos(l-\xi)}{\sqrt{1-\sin^2\varepsilon\cdot\sin^2 l}}+\sin(l-\xi)\cdot\sqrt{1-\sin^2\varepsilon\cdot\sin^2 l}=0 \qquad \text{(V)}$$

Es ist aber nach (III):

$$\cos(l-\xi)=\frac{\cos l}{\cos\delta};\quad \sin(l-\xi)=\frac{\sqrt{\cos^2\delta-\cos^2 l}}{\cos\delta},$$

womit (V) übergeht in

$$\sin l=\frac{\sin l(1-\sin^2 l)\cdot\sin^2\varepsilon}{\cos\delta\cdot\sqrt{1-\sin^2\varepsilon\cdot\sin^2 l}}+\frac{\sqrt{(1-\sin^2\varepsilon\cdot\sin^2 l)\cdot(\cos^2\delta-1+\sin^2 l)}}{\cos\delta}$$

Nun werde nach (II) $\sin l$ durch $\frac{\sin\delta}{\sin\varepsilon}$ ersetzt und vorher mit $\sqrt{1-\sin^2\varepsilon\cdot\sin^2 l}$ durchmultipliziert. Dies führt zu

$$\frac{\sin\delta\cdot\cos^2\delta}{\sin\varepsilon}=\frac{\sin\delta}{\sin\varepsilon}(\sin^2\varepsilon-\sin^2\delta)+\frac{\cos^2\delta\cdot\sin\delta}{\sin\varepsilon}\cdot\cos\varepsilon.$$

Indem man im Zähler mit $\sin\delta$ und im Nenner mit $\sin\varepsilon$ hebt, folgt nach einigen weiteren Vereinfachungen

$$\cos\delta=\pm\sqrt{\cos\varepsilon}$$

Mit $\varepsilon=23^0\,27'$ findet sich $\delta=16^0\,42'$ und hiermit nach (I) und (II)

$l=46^0\,13'\,41''$; $r=43^0\,45'\,40''$, mithin ist

$\xi=2^0\,38'\,1''$

Für $\delta\gtrless 16^0\,42'$ wird ξ stets $<2^0\,38'\,1''$. So zeigt beispielsweise die Rechnung, daß man für $\delta=8^0$ erhält: $\xi=1^0\,34'$ und für $\delta=21^0$: $\xi=1^0\,59'$

25. Aufgabe. Zu welcher Tageszeit bestimmt die Sonne an einem Orte der Breite φ mit dem Zenit und Pol ein sphärisches Dreieck von größtem Inhalt?

Von dem Dreieck Zenit—Pol—Sonne kennt man die zwei Seiten $90^0-\varphi$ und $90^0-\delta$. Aus diesen Stücken in Verbindung mit dem von ihnen eingeschlossenen unbekannten Stundenwinkel s ist der Inhalt des fraglichen Dreiecks zu bestimmen und zu einem Maximum zu machen. Bedeutet E den Exzeß des sphärischen Dreiecks, so ist sein Flächeninhalt bekanntlich

$$J=\frac{r^2\cdot\pi}{180^0}\cdot E=\frac{\pi}{180^0}\cdot E,$$

da wir den Radius der Himmelskugel gleich der Einheit setzen. Folglich ist J ein Maximum, falls E ein solches ist. Der Exzeß E errechnet sich aber aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel nach der Formel:

$$\operatorname{cotg}\frac{E}{2} = \operatorname{cotg} s + \frac{\operatorname{cotg}\frac{90^0-\varphi}{2}\cdot\operatorname{cotg}\frac{90^0-\delta}{2}}{\sin s} \quad \ldots \quad \text{(I)}$$

$$= \frac{\cos s + \operatorname{cotg}\left(45-\frac{\varphi}{2}\right)\cdot\operatorname{cotg}\left(45^0-\frac{\delta}{2}\right)}{\sin s},$$

woraus folgt:

$$\frac{E}{2} = \operatorname{arc\ cotg}\frac{\cos s + \operatorname{cotg}\left(45^0-\frac{\varphi}{2}\right)\cdot\operatorname{cotg}\left(45-\frac{\delta}{2}\right)}{\sin s} \quad \ldots \quad \text{(II)}$$

Soll E ein Maximum werden, so muß $\frac{dE}{ds}=0$ sein. Differentiert man (II), so erhält man

$$\frac{1}{2}\frac{dE}{ds} = -\frac{\sin s\cdot(-\sin s) - \cos s\left[\cos s + \operatorname{cotg}\left(45^0-\frac{\varphi}{2}\right)\cdot\operatorname{cotg}\left(45^0-\frac{\delta}{2}\right)\right]}{1+\left[\frac{\cos s + \operatorname{cotg}\left(45^0-\frac{\varphi}{2}\right)\cdot\operatorname{cotg}\left(45^0-\frac{\delta}{2}\right)}{\sin s}\right]^2}.$$

Dieser Ausdruck $=0$ gesetzt, führt zu der Gleichung

$$1 = -\cos s\cdot\operatorname{cotg}\left(45^0-\frac{\varphi}{2}\right)\cdot\operatorname{cotg}\left(45^0-\frac{\delta}{2}\right),$$

das ist

$$\cos(180^0-s) = \operatorname{tang}\left(45^0-\frac{\varphi}{2}\right)\cdot\operatorname{tang}\left(45^0-\frac{\delta}{2}\right) \quad \ldots \quad \text{(III)}$$

Formel (I) findet sich abgeleitet bei C. Spitz: Lehrbuch der sphärischen Trigonometrie, Leipzig, 1896, pag. 85ff. Für $\varphi=50^0$, $\delta=18^0$ findet man $s=104^0 29'$. Variiert man in (III) δ bei konstantem φ, so erhält man sämtliche Zeitpunkte an allen Tagen des Jahres, in welchen dies größte Dreieck gerade gebildet wird. Die Höhe der Sonne ist (allgemein)

$$\sin h = \sin\delta\cdot\sin\varphi + \cos\delta\cdot\cos\varphi\cdot\cos s \quad \ldots \quad \text{(IV)}$$

Da aber nach (III) $\cos s = -\operatorname{tang}\left(45^0-\frac{\varphi}{2}\right)\cdot\operatorname{tang}\left(45^0-\frac{\delta}{2}\right)$ ist, so wird für den speziellen Fall des Flächenmaximums

$$\sin h = \sin\delta\cdot\sin\varphi - \cos\delta\cdot\cos\varphi\cdot\operatorname{tang}\left(45^0-\frac{\varphi}{2}\right)\cdot\operatorname{tang}\left(45^0-\frac{\delta}{2}\right) \quad \text{(V)}$$

Ferner ist

$$\sin\alpha = \frac{\sin s \cdot \cos\delta}{\cos h}$$

$$= \frac{\cos\delta \cdot \sqrt{1 - \operatorname{tang}^2\left(45^0 - \frac{\varphi}{2}\right) \cdot \operatorname{tang}^2\left(45^0 - \frac{\delta}{2}\right)}}{\sqrt{1 - \left[\sin\delta\sin\varphi - \cos\delta\cos\varphi \cdot \operatorname{tang}\left(45^0 - \frac{\varphi}{2}\right)\operatorname{tang}\left(45^0 - \frac{\delta}{2}\right)\right]^2}}, \qquad \text{(VI)}$$

wenn man die Werte von s und h, die sie in unserem Falle haben, einsetzt.

Die Gleichungen (V) und (VI) geben die Koordinaten des Sonnenortes, bezogen auf den Horizont, an. Eliminiert man aus beiden δ, so erhält man die Gleichung der sphärischen Kurve, auf welcher sich die Sonne stets bei Eintritt des Flächenmaximums befinden muß.

26. Aufgabe. Man soll die Höhe berechnen, unter welcher sich das Azimut eines Sterns oder der Sonne bei gegebener Deklination und Polhöhe am langsamsten ändert.

Wir besitzen eine Lösung dieser Aufgabe von A. F. Möbius, die er im dritten Band der Zeitschrift für Astronomie und verwandte Wissenschaften S. 82ff. unter der Überschrift: „De minima variatione azimuti stellarum circulos parallelos uniformiter describentium commentatio“ veröffentlicht hat. Schon vorher hatten die französischen Astronomen Delambre (Base du système métrique décimal, I. Bd., Paris 1806) und Biot (Traité élémentaire d'astronomie physique I. Bd., Paris 1805) unrichtige Angaben gemacht, indem sie meinten, daß die langsamste Azimutänderung im Sechsstundenkreise vor sich gehe. Dies ist nur ganz ausnahmsweise richtig. Aber längst vorher hatte Moivre denselben Gegenstand eingehend behandelt und richtige Formeln gegeben. (Miscellanea analytica de seriebus et quadraturis, London 1730, Kap. VII.)

Wiederum ist im Zenit—Pol—Sonnendreieck nach dem Kotangentensatz

$$\sin\varphi \cdot \cos s = \cos\varphi \cdot \operatorname{tang}\delta + \sin s \cdot \operatorname{cotg}\alpha.$$

Die Differentiation $\frac{d\alpha}{ds}$ ergibt

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{\sin\alpha}{\sin s}(\sin\varphi \cdot \sin\alpha \cdot \sin s + \cos\alpha \cdot \cos s).$$

Ferner ist

$$\frac{\sin\alpha}{\sin s} = \frac{\cos\delta}{\cos h}$$

und, falls v den Winkel am Stern bezeichnet, nach dem Winkel-Kosinussatz:

$$\cos v = \cos\alpha \cdot \cos s + \sin\alpha \cdot \sin s \cdot \sin\varphi$$

$$= \frac{\sin\varphi - \sin h \cdot \sin\delta}{\cos h \cdot \cos\delta},$$

womit man hat

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{\sin\varphi - \sin h \cdot \sin\delta}{\cos^2 h},$$

oder

$$d\alpha = \frac{\sin\varphi - \sin h \cdot \sin\delta}{\cos^2 h} \cdot ds.$$

Eine nochmalige Differentiation des Ausdrucks für $d\alpha$ nach h gibt

$$d^2\alpha = -\frac{\sin\delta \cdot \sin^2 h - 2\sin\varphi \cdot \sin h + \sin\delta}{\cos^4 h} \cdot \cos h \cdot ds \cdot dh,$$

also, wenn man für $\cos h \cdot dh$ seinen aus der Differentiation der Gleichung

$$\sin h = \sin\delta \cdot \sin\varphi + \cos\delta \cdot \cos\varphi \cdot \cos s$$

entfließenden Wert

$$\cos h \cdot dh = -\cos\delta \cdot \cos\varphi \cdot \sin s \cdot ds$$

einsetzt,

$$\frac{d^2\alpha}{ds^2} = \frac{\sin\delta \cdot \sin^2 h - 2\sin\varphi \cdot \sin h + \sin\delta}{\cos^4 h} \cdot \sin s \cdot \cos\varphi \cdot \cos\delta.$$

Für ein Minimum der Azimutänderung muß $\frac{d^2\alpha}{ds^2} = 0$ sein.

$\left(\frac{d\alpha}{ds} = \text{Azimutänderung.}\right)$ Das gibt entweder

$$\sin s = 0,$$

wo also der Stern im Meridian steht und die Änderung des Azimuts bekanntlich ein Maximum ist, oder

$$\sin\delta \cdot \sin^2 h - 2\sin\varphi \cdot \sin h + \sin\delta = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (I)$$

Zunächst folgt hieraus nach einigen leichten Transformationen für die Berechnung der Höhe:

$$\operatorname{tang}(45^0 - \tfrac{1}{2}h) = \sqrt[4]{\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\varphi - \delta) \cdot \operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}(\varphi + \delta)},$$

und noch kürzer, wenn man die Höhe H_6 des Sterns oder der Sonne im Sechsstundenkreise einführt, wo $\sin H_6 = \frac{\sin\delta}{\sin\varphi}$ ist,

$$\sin h = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}H_6,$$

oder

$$\operatorname{tang}\left(45^0 - \frac{h}{2}\right) = \sqrt{\operatorname{tang}\left(45^0 - \frac{H_6}{2}\right)}.$$

Um die Spezialfälle aufzusuchen, wo α sich im Sechsstundenkreise am langsamsten ändert, müssen wir zunächst in

$$\cos s = \frac{\sin h - \sin\delta \cdot \sin\varphi}{\cos\delta \cdot \cos\varphi}$$

$s = 90^0$, d. h. $\cos s = 0$ setzen. Dies führt zu

$$\sin h = \sin\varphi \cdot \sin\delta.$$

Dies in (I) eingesetzt, gibt

$$\sin^3\delta \cdot \sin^2\varphi - 2\sin^2\varphi \cdot \sin\delta + \sin\delta = 0.$$

Es ist also entweder:

1. $\delta = 0$

oder

$$\begin{aligned} \sin^2\varphi \cdot \sin^2\delta - 2\sin^2\varphi + 1 &= 0 \\ \sin^2\varphi(\sin^2\delta - 1) - (\sin^2\varphi - 1) &= 0 \\ \sin^2\varphi \cdot \cos^2\delta &= \cos^2\varphi, \end{aligned}$$

das ist

2. $\cos\delta = \operatorname{cotg}\varphi$.

27. Aufgabe. Welche Höhe hat ein Stern an einem Orte der Breite φ in dem Moment, wo sein Azimut $= \alpha$ ist, wenn er unter allen Sternen, die in dem betrachteten Augenblick mit ihm auf demselben Höhenkreise liegen, die größte Deklination hat?

(Gestellt von G. Lony, Reifeprüfung d. Ober-Realsch. v. d. Holstentor, 1908.)

Aus dem Zenit—Pol—Sterndreieck folgt:

$$\sin\delta = \sin\varphi \cdot \sin h + \cos\varphi \cdot \cos h \cdot \cos(180^0 - \alpha) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(I)}$$

Hier soll δ zu einem Maximum gemacht werden, wobei es von der Veränderlichen h abhängt. (φ und α sind konstant.) Nimmt man in (I) die inverse Funktion, so hat man

$$\delta = \operatorname{arc\,sin}\left[\sin\varphi \cdot \sin h + \cos\varphi \cdot \cos h \cdot \cos(180^0 - \alpha)\right] \quad . \quad . \quad . \quad \text{(II)}$$

δ ist ein Maximum, falls $\frac{d\delta}{dh} = 0$ ist.

(I) nach h differentiiert gibt

$$\frac{d\delta}{dh} = \frac{\sin\varphi \cdot \cos h - \cos\varphi \cdot \sin h \cdot \cos(180^0 - \alpha)}{\sqrt{1 - [\sin\varphi \cdot \sin h + \cos\varphi \cdot \cos h \cdot \cos(180^0 - \alpha)]^2}} \quad . \quad . \quad . \quad \text{(III)}$$

Für $\frac{d\delta}{dh} = 0$ wird (III) zu

$$\sin\varphi \cdot \cos h = \cos\varphi \cdot \sin h \cdot \cos(180^0 - \alpha)$$

daraus folgt

$$\cos(180^0 - \alpha) = \operatorname{cotg}(90^0 - \varphi) \cdot \operatorname{cotg} h \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(IV)}$$

Gleichung (IV) besagt, daß bei dem Stern mit der größten Deklination ein rechter Winkel ist. Für die Berechnung von h hat man nach (IV)

$$\operatorname{cotg} h = \cos(180^0 - \alpha) \cdot \operatorname{cotg}\varphi.$$

28. Aufgabe. Für welche Sonnendeklination wird an einem Orte der gegebenen Breite φ die Dämmerung oder Tagesverlängerung am kürzesten?

Die Literatur über dieses in der Geschichte der Mathematik berühmt gewordene Problem ist außerordentlich groß; entsprechend auch die Arten der Lösung dieser Aufgabe. Gestellt wurde dieselbe zum erstenmal von

dem Portugiesen Nunez in dem Werke: De crepusculis, (Lissabon 1542) jedoch ohne Lösung. Die berühmten Mathematiker Jak. Bernoulli, D'Alembert und Fuss wandten auf diese Minimumsaufgabe den Differentialkalkul an, gelangten jedoch auf sehr verwickelte Formeln; auch Kästner glaubte, daß die Lösung einer biquadratischen Gleichung unumgänglich sei. (Astronom. Abhandlungen, 2. Bd., 1774). In No. 1085 der astronomischen Nachrichten gab D'Arrest zuerst eine einigermaßen einfache Lösung, während Stoll die Aufgabe völlig elementar und ohne Hilfe der höheren Analysis löste. (Zeitschr. f. Math. u. Phys., 28. Bd.) Im Anschluß hieran ließ H. Cranz im 31. Bd. derselben Zeitschrift eine geometrische Theorie der kürzesten Dämmerung folgen, wobei die stereographische Projektion zur Verwendung gelangt, während Monge schon früher eine Behandlung unseres Problems mittels descriptiver Geometrie gab. (Correspondance sur l'école impériale polytechnique par Hachette No. 5, 1806.) Eine sehr originelle Studie, bei der auch die Strahlenbrechung Berücksichtigung findet, rührt von Ph. Weinmeister her. (Gelenkviereck und Dämmerungsdauer, Zeitschr. f. Mathem. u. Phys. 55. Bd. 1907.) Durch Beigabe zahlreicher Tabellen zeichnet sich eine Programmabhandlung von J. Gallenmüller aus. (Die Dauer der Dämmerung auf der Erdoberfläche, Aschaffenburg 1900.) In unseren Beiträgen zur konstruktiven Behandlung usw. haben wir eine geometrische Auflösung der Aufgabe über die kürzeste Dämmerung in orthographischer Projektion gegeben. Endlich bemerken wir, daß man eine ausführliche Übersicht über die ältere und auch modernere Literatur bei Zelbr (Zeitschr. f. Math. u. Phys. 41. Bd.) findet.

Hier wollen wir die denkbar einfachste Lösung der Frage nach der kürzesten Dämmerung vortragen, indem wir uns dabei an die überaus klaren Ausführungen bei Brünnow (a. a. O. pag. 181) halten. Sie ist gleichzeitig ein Beispiel dafür, wie Aufgaben über extreme Werte, in deren Lösungen trigonometrische Relationen auftreten, ohne die Anwendung höherer Mathematik behandelt werden können.

Die Dauer der Dämmerung ist jene Zeit, welche der Sonnenmittelpunkt braucht, um vom Horizont bis zur „linea crepusculi" hinunterzusinken. Die Tiefe dieses sog. Dämmerungskreises betrage c^0. Ist $c = 6\frac{1}{2}^0$, so endigt die bürgerliche Dämmerung, wenn die Sonne diese Tiefe erreicht hat. Man bedarf dann zur Fortsetzung der Arbeit in Haus, Werkstatt usw. einer künstlichen Lichtquelle. Durch die Tiefe $c = 16^0$ bis 18^0 ist die astronomische Dämmerung begrenzt. Wenn die Sonne um diesen Betrag unter den Horizont hinabgesunken ist, hat sich der Himmelsgrund bereits so verdunkelt, daß der Astronom mit seinen Beobachtungen beginnen kann.

Es hängt nun wesentlich von der Deklination der Sonne ab, welche Zeit sie dazu gebraucht, um von einem gewissen Almukantarat (Höhenkreis) zu einem anderen c^0 tiefer liegenden (Dämmerungskreis) zu gelangen. Die Deklination, welche für eine gegebene Polhöhe φ den kürzesten Verlauf des Krepuskularphänomens bedingt, soll jetzt bestimmt werden. Dazu sei auf

Fig. 13 verwiesen. Während die Sonne in ihrem Parallel der Deklination δ von Σ nach Σ' geführt wird, bewegt sich der Punkt Z der Himmelskugel, der bei Beginn der Dämmerung im Zenit war, nach Z' auf einem Parallelkreis, dessen sphärischer Radius $= PZ = 90^0 - \varphi$ ist. Nennen wir den Stundenwinkel, der zu einer Fortbewegung des Punktes Z nach Z' gehört, s und legen wir durch Z und Z' einen größten Kreis, so ist in dem sphärischen Dreieck ZPZ':

$$\cos ZZ' = \sin^2\varphi + \cos^2\varphi \cdot \cos s \quad \ldots\ldots \quad (I)$$

Es ist aber auch im Dreieck $Z\Sigma' Z'$, wenn man den spitzen Winkel bei Σ' mit Σ' bezeichnet, nach demselben Satz

$$\cos ZZ' = \cos 90 \cdot \cos(90^0 + c) + \sin 90^0 \cdot \sin(90^0 + c) \cdot \cos \Sigma' = \cos c \cdot \cos \Sigma' \quad (II)$$

Aus der Gleichsetzung von (I) und (II) folgt

$$\sin^2\varphi + \cos^2\varphi \cdot \cos s = \cos c \cdot \cos \Sigma',$$

$$\cos^2\varphi (1 - \cos s) = 1 - \cos c \cdot \cos \Sigma'$$

das ist

$$2 \sin^2 \frac{s}{2} = \frac{1 - \cos c \cdot \cos \Sigma'}{\cos^2 \varphi} \quad \ldots\ldots \quad (III)$$

Aus dieser Gleichung erkennt man sofort, daß der Bruch rechter Hand, und damit auch der Stundenwinkel s, am kleinsten wird, wenn $\cos \Sigma' = 1$, d. h. $\Sigma' = 0$ ist. Dann geht (III) über in

$$\sin \tfrac{1}{2} s = \frac{\sin \frac{1}{2} c}{\cos \varphi} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (IV)$$

woraus sich die Dauer der kürzesten Dämmerung berechnen läßt.

Bezeichnet man ferner die parallaktischen Winkel der Sonne in Σ und Σ' mit v und v', so findet man nach dem Kosinussatz

$$\left.\begin{aligned} \cos v &= \frac{\sin \varphi}{\cos \delta} \\ \cos v' &= \frac{\sin \varphi + \sin c \cdot \sin \delta}{\cos c \cdot \cos \delta} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (V)$$

Nun ist $\sphericalangle v' = \sphericalangle P\Sigma' Z' + \sphericalangle \Sigma'$. Da aber Σ' in unserem Fall $= 0$ ist, so folgt, daß Z' auf dem Vertikalkreise liegen muß, den die Sonne beim Ende der kürzesten Dämmerung passiert. Weil die Deklinationskreise auf dem Parallelkreise und die Vertikalkreise auf den Almukantaraten senkrecht stehen, so muß $v = v'$ sein[1]). Es dürfen mithin die rechten Seiten der beiden Gleichungen (V) einander gleichgesetzt werden. Dies führt zu

$$\sin \delta = -\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} c \cdot \sin \varphi \quad \ldots\ldots\ldots \quad (VI)$$

womit die Antwort auf unsere eingangs gestellte Frage gegeben ist. Schreibt man statt (VI):

$$\sin(-\delta) = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} c \cdot \sin \varphi,$$

[1]) Die sphärischen Dreiecke $ZP\Sigma$ und $Z'P\Sigma'$ haben dann drei gleiche Seiten, nämlich: $Z\Sigma = Z'\Sigma' = 90^0$; $PZ = PZ' = 90^0 - \varphi$ und $P\Sigma = P\Sigma' = 90^0 - \delta$, also müssen auch ihre Winkel gleich sein.

so erkennt man, daß die kürzeste Dämmerung bei negativer Sonnendeklination, also vor dem Frühlings- und nach dem Herbstäquinoktium eintritt.

Wir wollen dieser elementaren Ableitung der zwei Hauptformeln (IV) und (VI) noch zwei bekannte Sätze über die kürzeste Dämmerung hinzufügen, deren erster sich schon in Bohnenbergers Astronomie (Tübingen, 1811) bewiesen findet.

Da die Winkel $Z\Sigma H$ und $Z'\Sigma' H'$ rechte sind und $v = v'$ ist, so muß auch $\measuredangle P\Sigma H = \measuredangle P\Sigma' H'$ sein, oder mit anderen Worten.

Zur Zeit der kürzesten Dämmerung schneidet der Parallelkreis der Sonne den Dämmerungskreis und den Horizont unter gleichen Winkeln.

Bezeichnet man das Azimut von Σ mit α, das von Σ' mit α', so hat man

$$\cos\varphi \cdot \sin\alpha = \cos\delta \cdot \sin v$$
$$\cos\varphi \cdot \sin\alpha' = \cos\delta \cdot \sin v',$$

daher für $v = v'$:

$$\sin\alpha = \sin\alpha' = \sin(180^0 - \alpha').$$

Mithin ergänzen sich die Azimute zu 180^0. Daher ist $\frac{\alpha + \alpha'}{2} = \frac{180^0}{2} = 90^0$.

Nun ist aber auch $\alpha + \frac{\alpha' - \alpha}{2} = \frac{\alpha + \alpha'}{2} = 90^0$, was, mit der Figur verglichen, besagt:

Zur Zeit der kürzesten Dämmerung liegen die Vertikalkreise, welche die Sonne am Anfang und am Ende der kürzesten Dämmerung passiert, symmetrisch zum ersten Vertikal.

Folgende Tabelle über Dauer und Eintritt der kürzesten bürgerlichen Dämmerung entnehmen wir der schon erwähnten Programmschrift J. Gallenmüllers (Siehe Seite 48):

29. Aufgabe. Es ist jener Neigungswinkel der matten Glasfenster unserer Gewächshäuser zu bestimmen, unter dem auf die horizontal liegenden Pflanzenbeete die größtmögliche Lichtfülle gelangt, und zwar

a) im Sommer,

b) im Winter.

Die auf das matte Glas treffende Lichtmenge ist für die Gewächse des Beetes als Lichtquelle zu betrachten. Sie erfahren also eine um so intensivere Beleuchtung, je kräftiger die Bestrahlung der Fenster durch das Sonnenlicht ist. Die Lichtintensität ist aber nach einem bekannten Satz der Optik dem Sinus des Inzidenzwinkels proportional, das ist der Sonnenhöhe ξ über der bestrahlten Fläche, ausgedrückt in Bogengraden. Zunächst gilt es also diese Sonnenhöhe ξ zu berechnen, wie sie sich während einer scheinbaren Umdrehung des Himmelsgewölbes für eine schräg zum Horizont gelegene Ebene darstellt.

In Fig. 14 sei E die zum Horizont unter dem Winkel $90^0 - \psi$ inklinierende und zur Mittagslinie um $90^0 - \alpha$ deklinierende Ebene. Wenn die

Kürzeste bürgerliche Dämmerung.

φ	Dauer	Eintritt derselben
	h m s	
0^0	0 28 0	am 21. März und am 23. September,
5	0 28 8	„ 20. „ „ „ 24. „
10	0 28 24	„ 19. „ „ „ 25. „
15	0 28 56	„ 18. „ „ „ 25. „
20	0 29 44	„ 18. „ „ „ 26. „
25	0 30 14	„ 17. „ „ „ 27. „
30	0 32 20	„ 16. „ „ „ 28. „
35	0 34 12	„ 16. „ „ „ 28. „
40	0 36 34	„ 15. „ „ „ 29. „
45	0 39 37	„ 14. „ „ „ 30. „
50	0 43 36	„ 14. „ „ „ 30. „
55	0 48 52	„ 13. „ „ „ 1. Oktober,
60	0 56 5	„ 13. „ „ „ 1. „
65	1 6 27	„ 13. „ „ „ 1. „
70	1 22 16	„ 12. „ „ „ 2. „
75	1 49 8	„ 12. „ „ „ 2. „
80	2 44 40	„ 12. „ „ „ 2. „
85	5 15 2	„ 12. „ „ „ 2. „

Sonne in ihrer Parallelkreisbahn BSS' in dem Punkte S angekommen ist, so sendet sie ihre Strahlen hinab nach T, so daß $ST = \xi$ die gesuchte Sonnenhöhe ist. Der Scheitelpunkt (das Zenit) für unsere Ebene E ist G'', um welchen sich alle Höhenkreise (z. B. $G''ST$) drehen. Man erkennt jetzt ohne weiteres, daß G'' in bezug auf die Ebene E dieselbe Rolle spielt wie das Zenit Z für den Horizont HH_1. Eine weitere Klarlegung der Sachlage ist wohl durch die Figur überflüssig gemacht; es soll lediglich noch hervorgehoben werden, daß die Azimutdifferenz $GV = \Delta\alpha$ ganz beliebig ist.

Zunächst folgt aus dem Zenit—Pol—Sonnedreieck:

$$\sin h = \sin\delta \cdot \sin\varphi + \cos\delta \cdot \cos\varphi \cdot \cos s \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(I)}$$

und nach demselben Kosinussatz aus dem sphärischen Dreieck $SG''Z$:

$$\sin\xi = \sin h \cdot \sin\psi + \cos h \cdot \cos\psi \cdot \cos(\alpha + \Delta\alpha) \quad . \quad . \quad . \quad \text{(II)}$$

Weiterhin ergibt der Sinussatz auf das Zenit—Pol—Sonnendreieck angewandt:

$$\frac{\sin\delta}{\cos h} = \frac{\sin(\alpha + \Delta\alpha)}{\sin s} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(III)}$$

woraus man für $\alpha = 0$ findet[1])

$$\cos \Delta\alpha = \frac{\sqrt{\cos^2 h - \cos^2\delta \cdot \cos^2 s}}{\cos h}$$

Mit diesem Wert von $\cos\Delta\alpha$ verwandelt sich (II) in

$$\sin\xi = \sin h \cdot \sin\psi + \cos\psi \cdot \sqrt{\cos^2 h - \cos^2\delta \cdot \cos^2 s},$$

und, wenn man noch mittels (I) die Größe h eliminiert:

$$\sin\xi = \sin\psi(\sin\delta \cdot \sin\psi + \cos\delta \cdot \cos\varphi \cdot \cos s) + \cos\psi(\sin\delta \cdot \cos\varphi + \cos\delta \cdot \sin\varphi \cdot \cos s) \quad . \quad \text{(IV)};$$

dies ist der Ausdruck, der zur weiteren Behandlung der Frage dient. Wie man sofort erkennt, stellt die Summe der beiden Doppelintegrale

$$L = 2C \cdot \sin\psi \int_0^{+\varepsilon} \int_{-s_0}^{+s_0} (\sin\delta \cdot \sin\varphi + \cos\delta \cdot \cos\varphi \cdot \cos s)\, ds \cdot d\delta + 2C \cdot \cos\psi \int_0^{+\varepsilon} \int_{-s_0}^{+s_0} (\sin\delta \cdot \cos\varphi + \cos\delta \cdot \sin\varphi \cdot \cos s)\, ds \cdot d\delta \quad \text{(V)}$$

die halbjährliche Lichtmenge dar, wenn man unter C einen gewissen Proportionalitätsfaktor versteht, der von uns als konstant angenommen wurde, daher bei der Bestimmung des Maximums von L fortfällt. ε bedeutet die Ekliptikschiefe als das Maximum der Sonnendeklination; die Grenzen $\pm s_0$ sind jene Stundenwinkel, bei denen die Beleuchtung der Glaswand durch die Sonne anfängt, resp. endet. Sie ergeben sich leicht aus der Überlegung, daß in diesen Augenblicken $\xi = 0$ sein muß. Dann folgt durch eine leichte Rechnung aus (IV)

$$\cos s_0 = -\tan\delta \cdot \frac{\cos(\varphi - \psi)}{\sin(\varphi + \psi)},$$

oder

$$s_0 = \arccos\left[-\tan\delta \cdot \frac{\cos(\varphi - \psi)}{\sin(\varphi + \psi)}\right].$$

Da ferner die Dauer der Besonnungszeit zum Mittag symmetrisch liegt, so kann man (V) auch so schreiben:

$$L = 4C \cdot \sin\psi \int_0^{+\varepsilon} \int_0^{s_0 = \arccos\left[-\tan\delta \cdot \frac{\cos(\varphi-\psi)}{\sin(\varphi+\psi)}\right]} (\sin\delta \cdot \sin\varphi + \cos\delta \cdot \cos\varphi \cdot \cos s)\, ds \cdot d\delta + 4C \cdot \cos\psi \int_0^{+\varepsilon} \int_0^{s_0 = \arccos\left[-\tan\delta \cdot \frac{\cos(\varphi-\psi)}{\sin(\varphi+\psi)}\right]} (\sin\delta \cdot \cos\varphi + \cos\delta \cdot \sin\varphi \cdot \cos s)\, ds \cdot d\delta \quad . \quad \text{(VI)}$$

[1]) Für $\alpha = 0$ zieht die Ebene von Ost nach West. Durch diese spezielle Annahme wird die nachfolgende Rechnung erheblich vereinfacht.

Die Integration nach s läßt sich leicht vollziehen. Man hat nämlich

$$L = C_1 \cdot \sin\psi \int_0^{+\varepsilon} \left\{ \sin\delta \cdot \sin\varphi \cdot \arccos\left[-\operatorname{tang}\delta \cdot \frac{\cos(\varphi-\psi)}{\sin(\varphi+\psi)} \right] + \cos\delta \cdot \cos\varphi \cdot \sqrt{1 - \operatorname{tang}^2\delta \cdot \frac{\cos^2(\varphi-\psi)}{\sin^2(\varphi+\psi)}} \right\} d\delta$$

$$+ C_1 \cdot \cos\psi \int_0^{+\varepsilon} \left\{ \sin\delta \cdot \cos\varphi \cdot \arccos\left[-\operatorname{tang}\delta \cdot \frac{\cos(\varphi-\psi)}{\sin(\varphi+\psi)} \right] + \cos\delta \cdot \sin\varphi \cdot \sqrt{1 - \operatorname{tang}^2\delta \cdot \frac{\cos^2(\varphi-\psi)}{\sin^2(\varphi+\psi)}} \right\} d\delta$$

wenn man $4C = C_1$ setzt und beachtet, daß nach obigem

$$\sin s_0 = \sqrt{1 - \operatorname{tang}^2\delta \cdot \frac{\cos^2(\varphi-\psi)}{\sin^2(\varphi+\psi)}} \quad \text{ist.}$$

Zur Durchführung der zweiten Integration entwickeln wir die zu integrierenden Ausdrücke in Potenzreihen, deren Konvergenz bei der Kleinheit von $\operatorname{tang}\delta$ außer Frage steht. Man hat bekanntlich

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \left(x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \dots \right)$$

$$\sqrt{1-x^2} = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{16}x^6 - \dots$$

Bleibt man in beiden Reihenentwickelungen beim zweiten Gliede stehen, so ergibt sich nach gehöriger Zusammenfassung:

$$L = C_1 \cdot \cos(\varphi-\psi) \int_0^{+\varepsilon} \left[\sin\delta \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{tang}\delta \cdot \frac{\cos(\varphi-\psi)}{\sin(\varphi+\psi)} \right) \right] d\delta$$

$$+ C_1 \cdot \sin(\varphi+\psi) \int_0^{+\varepsilon} \left[\cos\delta \left(1 - \frac{1}{2} \operatorname{tang}^2\delta \cdot \frac{\cos^2(\varphi-\psi)}{\sin^2(\varphi+\psi)} \right) \right] d\delta$$

$$= C_1 \cdot \cos(\varphi-\psi) \left\{ -\frac{\pi}{2} \cdot (\cos\delta)_0^{+\varepsilon} - \frac{\cos(\varphi-\psi)}{\sin(\varphi+\psi)} \int_0^{+\varepsilon} \frac{\sin^2\delta}{\cos\delta} d\delta \right\}$$

$$+ C_1 \cdot \sin(\varphi+\psi) \left\{ (\sin\delta)_0^{+\varepsilon} - \frac{1}{2} \frac{\cos^2(\varphi-\psi)}{\sin^2(\varphi+\psi)} \int_0^{+\varepsilon} \frac{\sin^2\delta}{\cos\delta} d\delta \right\}$$

$$= C_1 \cdot \frac{\pi}{2} \cos(\varphi-\psi)(1-\cos\varepsilon) + C_1 \cdot \sin\varepsilon \cdot \sin(\varphi+\psi)$$

$$- \frac{3}{2} \cdot C_1 \frac{\cos^2(\varphi-\psi)}{\sin(\varphi+\psi)} \int_0^{+\varepsilon} \frac{1-\cos^2\delta}{\cos\delta} d\delta$$

$$= C_1 \cdot \pi \cdot \sin^2\frac{\varepsilon}{2} \cdot \cos(\varphi - \psi) + 2\, C_1 \sin\frac{\varepsilon}{2} \cdot \cos\frac{\varepsilon}{2} \cdot \sin(\varphi + \psi)$$

$$- \frac{3}{2} \cdot C_1 \cdot \frac{\cos^2(\varphi - \psi)}{\sin(\varphi + \psi)} \left\{ \int_0^{+\varepsilon} \frac{d\delta}{\cos\delta} - \int_0^{+\varepsilon} \cos\delta \, d\delta \right\}$$

$$= C_1 \cdot \pi \cdot \sin^2\frac{\varepsilon}{2} \cdot \cos(\varphi - \psi) + 2 \sin\frac{\varepsilon}{2} \cdot \cos\frac{\varepsilon}{2} \cdot C_1 \cdot \sin(\varphi + \psi)$$

$$- \frac{3}{2} C_1 \cdot \frac{\cos^2(\varphi - \psi)}{\sin(\varphi + \psi)} \left[l\,\mathrm{tang}\left(45^0 + \frac{\varepsilon}{2}\right) - \sin\varepsilon \right]. \quad \text{(VII)}$$

Gleichung (VII) stellt einen angenäherten Wert dar für den halbjährlichen Betrag der Beleuchtung einer unter dem Neigungswinkel $90^0 - \psi$ zum Horizont ansteigenden Glaswand, die unter der geographischen Breite φ liegt. Es entsteht also jetzt die Frage: Welches ist der Steilwinkel $90^0 - \psi$, damit besagte Beleuchtung ein Maximum wird? Dazu hat man (VII) bei konstant gehaltenem φ nach der Veränderlichen ψ zu differentiieren und den so gefundenen Ausdruck der Null gleichzusetzen. Indessen wird die hieraus resultierende Gleichung zur Berechnung von ψ schon so kompliziert, daß ihre Auflösung praktisch untunlich ist. Es bleibt uns nichts übrig, als zur Erlangung nur ganz roher Werte von ψ den Posten

$$- \frac{3}{2} C_1 \cdot \frac{\cos^2(\varphi - \psi)}{\sin(\varphi + \psi)} \left[l\,\mathrm{tang}\left(45^0 + \frac{\varepsilon}{2}\right) - \sin\varepsilon \right]$$

zu unterdrücken. Der Inhalt der eckigen Klammer ist freilich nicht groß. Man findet dafür

$$l\,\mathrm{tang}\left(45^0 + \frac{\varepsilon}{2}\right) - \sin\varepsilon = -0.1282,$$

also

$$-\tfrac{3}{2}\left[l\,\mathrm{tang}\left(45^0 + \frac{\varepsilon}{2}\right) - \sin\varepsilon \right] = 0.1823.$$

Wenn daher $\dfrac{\cos^2(\varphi - \psi)}{\sin(\varphi + \psi)}$ wesentlich kleiner als 1 ist, so wäre die Vernachlässigung des besagten Ausdrucks allenfalls angängig, nachdem man die ganze Gleichung (VII) vorher noch mit C_1 durchdividiert hat. So vereinfacht, schreibt sich (VII) alsdann

$$\frac{L}{C_1 \cdot \sin\frac{\varepsilon}{2}} = \pi \cdot \sin\frac{\varepsilon}{2} \cdot \cos(\psi - \varphi) + 2 \cdot \cos\frac{\varepsilon}{2} \cdot \sin(\varphi + \psi).$$

Für ein Maximum von L ist:

$$0 = -\pi \cdot \sin\frac{\varepsilon}{2} \cdot \sin(\psi - \varphi) + 2 \cdot \cos\frac{\varepsilon}{2} \cdot \cos(\varphi + \psi)$$

$$\frac{\pi}{2} \cdot \mathrm{tang}\frac{\varepsilon}{2} = \frac{\cos(\varphi + \psi)}{\sin(\psi - \varphi)} = \frac{1 - \mathrm{tang}\,\varphi \cdot \mathrm{tang}\,\psi}{\mathrm{tang}\,\psi - \mathrm{tang}\,\varphi}.$$

Die Umrechnung nach $\text{tang}\psi$ liefert die Formel

$$\text{tang}\psi = \frac{1 + \frac{\pi}{2} \cdot \text{tang}\frac{\varepsilon}{2} \cdot \text{tang}\varphi}{\frac{\pi}{2} \cdot \text{tang}\frac{\varepsilon}{2} + \text{tang}\varphi} \quad \ldots\ldots\ldots \text{(VIII)}$$

a) Nehmen wir nun erst $\varepsilon = +23^0 27'$, so erhalten wir die folgende für das Sommerhalbjahr gültige Tabelle.

φ	$90^0 - \psi$
0^0	ca. 17^0
10^0	„ 26^0
20^0	„ 32^0
30^0	„ $37\frac{1}{2}^0$
35^0	„ 40^0
40^0	„ 42^0
45^0	„ 45^0
50^0	„ 48^0
60^0	„ 55^0
70^0	„ 60^0
80^0	„ 65^0
90^0	„ 73^0

Obgleich diese Zahlenwerte keinerlei Anspruch auf Genauigkeit erheben können, so zeigen sie doch deutlich die Tatsache, daß mit zunehmender Breite auch der Inklinationswinkel einer Fläche wachsen muß, soll sie durch Besonnung die möglichst stärkste Belichtung erfahren. Bei welchen Winkelwerten der Quotient $\frac{\cos^2(\psi - \varphi)}{\sin(\varphi + \psi)}$ am kleinsten wird, läßt sich bei der Ungenauigkeit von ψ auch nicht näher angeben, doch ist der Bruch für geringe Breiten sicherlich bedeutend kleiner als die Einheit.

b) Für das Winterhalbjahr ist $+\varepsilon$ mit $-\varepsilon$ zu vertauschen, womit Formel (IX) übergeht in

$$\text{tang}\psi = \frac{1 - \frac{\pi}{2} \cdot \text{tang}\frac{\varepsilon}{2} \cdot \text{tang}\varphi}{\text{tang}\varphi - \frac{\pi}{2} \cdot \text{tang}\frac{\varepsilon}{2}} \quad \ldots\ldots\ldots \text{(X)}$$

Wie zu erwarten, liefert ihre numerische Auswertung steilere Neigungswinkel, als sie das Sommerhalbjahr verlangt. Tatsächlich gab man besonders in früheren Zeiten den Fenstern unserer Glashäuser oft Neigungen von 70 und mehr Grad. Nach Formel (X) erhält man beispielsweise:

Breite φ	Neigung zum Horizont
50^0	56^0
55^0	64^0
60^0	72^0

Da die Erwärmung eines Geländes ebenfalls dem Sinus des Inzidenzwinkels proportional ist, so ist der günstigste Neigungswinkel für Beleuchtung einer Fläche identisch mit jenem für ihre Erwärmung. Die letztere Frage hat z. B. praktische Bedeutung für Berghalden mit Wein- oder Obstkulturen. Solche thermogeographischen Betrachtungen sind sogar unter Berücksichtigung der Absorption der Sonnenwärme durch die Erdatmosphäre und anderer das solare Klima modifizierenden Faktoren mit Hilfe der höheren Analysis schon öfters angestellt worden. Wir verweisen bezüglich der einschlägigen Literatur auf das Handbuch der Geophysik von S. Günther (2. Bd., 2. Aufl. pag. 269 ff., Stuttgart, 1899), wo sie erschöpfend gegeben ist. Hingegen ist uns keine Arbeit bekannt, welche die Frage unter Voraussetzung geneigter Flächen behandelt; es wird stets eine horizontale Ebene angenommen.

30. Aufgabe. In der kalten Zone ereignet es sich, daß die vom Ende eines Stabes auf eine horizontale Ebene beschriebene Schattenlinie eine geschlossene Kurve werden kann. Bei welcher Sonnendeklination ist deren Flächeninhalt bei gegebener Ortsbreite ein Maximum?

Wie in Aufgabe 44 bewiesen wird, ist die fragliche Schattenkurve ein Kegelschnitt mit der Gleichung

$$y^2\sin^2\delta + x^2(\sin^2\delta - \cos^2\varphi) + q\cdot\sin 2\varphi\cdot x + q^2(\sin^2\delta - \sin^2\varphi) = 0 \qquad \text{(I)}$$

wobei q die Höhe des Gnomons bedeutet und die Achsen der Kegelschnittslinie mit den vier Kardinalrichtungen zusammenfallen. Die Gleichung stellt eine Ellipse dar, wenn $\varphi > 90^0 - \delta$ ist. (Mitternachtssonne.) Wie bei der Diskussion der allgemeinen Gleichung 2. Grades gezeigt wird, lassen sich die Achsen a und b aus den Konstanten der Gleichung, die in unserem Falle δ, φ und q sind, nach bekannten Transformationsformeln ermitteln. Der Flächeninhalt der Ellipse ist dann

$$J = ab\pi$$

oder in unserem Falle

$$J = \pi\cdot q^2\cdot\frac{\sin\delta\cdot\cos^2\delta}{(\sin^2\varphi - \cos^2\delta)^{\frac{3}{2}}} \qquad \text{(II)}$$

wie eine leichte Rechnung zeigt[1]). Diesen Ausdruck (II) gilt es zu einem Maximum zu machen. Ist $\delta = 0$ (Äquinoktium), so wird aus (I):

$$x\cdot\cos\varphi - q\cdot\sin\varphi = 0,$$

$$x = q\cdot\operatorname{tang}\varphi,$$

[1]) Vgl. auch Aufg. 38.

d. h. der Kegelschnitt geht in eine gerade Linie über. Sein Flächeninhalt ist $=0$. Könnte $\delta = 90^0$ werden, befände sich die Sonne also im Pol, so hätte man aus (I)

$$y^2 + x^2 \sin^2\varphi + q \cdot \sin 2\varphi \cdot x + q^2 \cos^2\varphi = 0,$$
$$y^2 + (x \sin\varphi + q\cos\varphi)^2 \qquad = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(III)}$$

womit also der Kegelschnitt zum Kreis mit dem Radius $r = 0$ geworden ist. Dann ist der Flächeninhalt der Schattenkurve zum zweitenmal $= 0$. Er muß daher zwischen den zwei extremen Werten $\delta = 0^0$ und $\delta = 90^0$ einen Maximalwert annehmen. Wir finden das zu einem gegebenen φ gehörige δ, wenn wir (II) nach δ differentieren und das Resultat $= 0$ setzen. Dies führt zu

$$\frac{dJ}{d\delta} = (\sin^2\varphi - \cos^2\delta) \cdot \sqrt{\sin^2\varphi - \cos^2\delta} \cdot (\cos\delta - 3\sin^2\delta \cdot \cos\delta)$$
$$+ \tfrac{3}{2} \cdot \sqrt{\sin^2\varphi - \cos^2\delta} \cdot 2\sin^2\delta\cos^3\delta = 0,$$

und, indem man mit $\cos\delta \cdot \sqrt{\sin^2\varphi - \cos^2\delta}$ hebt, zu

$$0 = (\sin^2\varphi - \cos^2\delta)(1 - 3\sin^2\delta) + 3\sin^2\delta \cdot \cos^2\delta,$$

woraus weiterhin folgt

$$(\sin^2\varphi - \cos^2\delta)(3\sin^2\delta - 1) = 3\sin^2\delta - 3\sin^4\delta,$$

$$6\sin^4\delta - \sin^2\delta(7 - 3\sin^2\varphi) = -\cos^2\varphi,$$

$$\sin\delta = \pm\tfrac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{7 - 3\sin\varphi \pm \sqrt{(7 - 3\sin\varphi)^2 - 24\cos^2\varphi}}{3}} \quad . \quad \text{(IV)}$$

Formel (IV) zeigt, daß zwei Maxima vorhanden sind. Jedoch entspricht dem positiven Vorzeichen der kleineren Wurzel kein Wert von δ, der innerhalb der Grenzen $0^0 < \delta < 23\frac{1}{2}^0$ liegt. Somit bleibt nur ein geometrisch brauchbares Maximum, welches man unter Berücksichtigung des negativen Vorzeichens der zweiten Wurzel erhält und welches zeitlich nicht weit von den Äquinoktien absteht. Beide Maxima würden zusammenfallen, wenn

$$7 - 3\sin\varphi = \cos\varphi\sqrt{24} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(V)}$$

wäre. Gleichung (V) liefert jedoch für φ keinen reellen Wert.

31. Aufgabe. Wann ist der Winkel am Stern (Variation v, parallaktischer Winkel) bei gegebener Deklination an einem bekannten Beobachtungort ein Maximum?

Im Meridian, sowohl bei der unteren als oberen Kulmination, verschwindet das astronomische Dreieck: Zenit — Pol — Stern vollständig, und damit sind auch alle seine Winkel $= 0$. Nach dem Durchgang eines Gestirns

durch den Meridian fängt der Winkel v an zu wachsen, um dann nach Verlauf von zwölf Stunden wiederum $=0$ zu sein. Er muß also in der Zwischenzeit einen größten Wert besessen haben.

Man findet nach dem Kotangentensatz:

$$\sin\delta \cdot \cos s = \cos\delta \cdot \operatorname{tang}\varphi - \sin s \cdot \operatorname{cotg} v,$$

und hieraus:

$$v = \operatorname{arc\,cotg} \frac{\cos\delta \cdot \operatorname{tang}\varphi - \sin\delta \cdot \cos s}{\sin s}$$

Die Differentiation dieses Ausdrucks nach s ergibt.

$$-\frac{dv}{ds} = \frac{1}{1+\left(\frac{\cos\delta \cdot \operatorname{tang}\varphi - \sin\delta \cdot \cos s}{\sin s}\right)^2} \cdot \frac{\sin^2 s \cdot \sin\delta - \cos s(\cos\delta \cdot \operatorname{tang}\varphi - \sin\delta \cdot \cos s)}{\sin^2 s}$$

Für ein Maximum von v ist der Ausdruck rechter Hand gleich Null zu setzen. Dies führt zu der Bedingungsgleichung

$$\sin^2 s \cdot \sin\delta + \cos^2 s \cdot \sin\delta - \cos s \cdot \cos\delta \cdot \operatorname{tang}\varphi = 0,$$

woraus man zieht

$$\sin\delta = \cos s \cdot \cos\delta \cdot \operatorname{tang}\varphi,$$

das ist

$$\cos s = \operatorname{tang}\delta \cdot \operatorname{cotg}\varphi.$$

Hieraus folgt, daß das Azimut $\alpha = 90^0$ ist, d. h. das Gestirn im Westen steht; $\cos s$ liefert nur so lange einen reellen Wert für s, als das Produkt $\operatorname{tang}\delta \cdot \operatorname{cotg}\varphi < 1$ ist.

32. Aufgabe. Bei welcher Deklination ist der Unterschied zwischen dem Azimut und dem Stundenwinkel eines Gestirns beim Untergang an einem gegebenen Beobachtungorte ein Maximum?[1])

In dem rechtwinkligen Dreieck PU_1H_1 der Fig. 1 ist

$$\cos s_0 = -\operatorname{tang}\varphi \cdot \operatorname{tang}\delta \quad \ldots\ldots\ldots \quad (I)$$

und falls man das Azimut H_2U_1 mit α_0 bezeichnet:

$$\sin\delta = -\cos\varphi \cdot \cos\alpha_0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (II)$$

Aus (I) und (II) folgt durch Umkehrung

$$s_0 = \operatorname{arc\,cos}(-\operatorname{tang}\varphi \cdot \operatorname{tang}\delta)$$

$$\alpha_0 = \operatorname{arc\,cos}\left(-\frac{\sin\delta}{\cos\varphi}\right).$$

Dann soll die Differenz $s_0 - \alpha_0 = \operatorname{arc\,cos}(-\operatorname{tang}\varphi \cdot \operatorname{tang}\delta) - \operatorname{arc\,cos}\left(-\frac{\sin\delta}{\cos\varphi}\right)$ ein Maximum werden.

---

[1]) Nach einer frdl. brieflichen Mitteilung von Herrn Prof. H. Michnik.

Durch Differentiation nach δ findet man

$$\frac{d(s_0 - \alpha_0)}{d\delta} = \frac{\operatorname{tang}\varphi}{\cos^2\delta \cdot \sqrt{1 - \operatorname{tang}^2\varphi \cdot \operatorname{tang}^2\delta}} - \left[-\frac{1}{\cos\varphi} \cdot \frac{(-\cos\delta)}{\sqrt{1 - \frac{\sin^2\delta}{\cos^2\varphi}}} \right]$$

$$= \frac{\operatorname{tang}\varphi}{\cos^2\delta \sqrt{1 - \operatorname{tang}^2\varphi \cdot \operatorname{tang}^2\delta}} - \frac{\cos\delta}{\sqrt{\cos^2\varphi - \sin^2\delta}}$$

Wird die Differenz rechter Hand $= 0$ gesetzt, so ergibt sich leicht

$$\cos^4\delta = \frac{\sin^2\varphi\,(\cos^2\varphi - \sin^2\delta)}{\cos^2\varphi \cdot \cos^2\delta - \sin^2\varphi \cdot \sin^2\delta} = \frac{\sin^2\varphi\,(\cos^2\varphi - \sin^2\delta)}{\cos^2\delta - \sin^2\varphi} = \sin^2\varphi,$$

und hieraus

$$\cos\delta = \pm\sqrt{\sin\varphi}.$$

IV. Abschnitt.

Zeit- und Ortsbestimmungen, sowie diesen verwandte Probleme.

33. Aufgabe. Was ist die Bedingung dafür, daß die drei Punkte O_1, O_2 und O_3 mit den sphärischen Koordinaten λ_1, φ_1, λ_2, φ_2 und λ_3, φ_3 auf einen Großkreis liegen?

Diese Aufgabe ist in E. v. Hammers Lehrbuch der ebenen und sphärischen Trigonometrie (Stuttgart 1897, 2. Aufl. S. 482) gestellt und dort in sehr einfacher Weise, wie folgt, gelöst.

Bezieht man die Punkte O_1, O_2 und O_3 auf ein rechtwinkliges räumliches Koordinatensystem, dessen XY-Ebene im Äquator liegt, während die Z-Achse in die Weltachse fällt, so erhält man, falls die X-Achse durch den Nullmeridian geht, für die rechtwinkligen Koordinaten der drei Punkte

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= r \cdot \cos\varphi_1 \cos\lambda_1 \\ y_1 &= r \cdot \cos\varphi_1 \cdot \sin\lambda_1 \\ z_1 &= r \cdot \sin\varphi_1 \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} x_2 &= r \cdot \cos\varphi_2 \cdot \cos\lambda_2 \\ y_2 &= r \cdot \cos\varphi_2 \cdot \sin\lambda_2 \\ z_2 &= r \cdot \sin\varphi_2 \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} x_3 &= r \cdot \cos\varphi_3 \cos\lambda_3 \\ y_3 &= r \cdot \cos\varphi_3 \cdot \sin\lambda_3 \\ z_3 &= r \cdot \sin\varphi_3 \end{aligned}\right\}$$

r ist der Kugelradius. Da ein Großkreis stets durch den Kugelmittelpunkt geht, so muß die Ebene der drei Punkte den letzteren ebenfalls enthalten. Die analytische Geometrie des Raumes gibt für die Bedingung, daß genannte Ebene durch den Koordinatenanfangspunkt geht, die bekannte Formel

$$z_1 \cdot (x_2 y_3 - x_3 y_2) + z_2 \cdot (x_3 y_1 - x_1 y_3) + z_3 \cdot (x_1 y_2 - x_2 y_1) = 0 \quad . \qquad \text{(I)}$$

Geht man jetzt zu Polarkoordinaten über, so wird aus (I):

$$\begin{aligned} \sin\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 \cdot \cos\varphi_3 \cdot \sin(\lambda_3 - \lambda_2) + \sin\varphi_2 \cos\varphi_3 \cdot \cos\varphi_1 \cdot \sin(\lambda_1 - \lambda_3) \\ + \sin\varphi_3 \cdot \cos\varphi_2 \cdot \cos\varphi_1 \cdot \sin(\lambda_1 - \lambda_2) = 0, \end{aligned}$$

oder, wenn man mit $\cos\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 \cdot \cos\varphi_3$ durchdividiert:

$$\operatorname{tang}\varphi_1 \cdot \sin(\lambda_2 - \lambda_3) + \operatorname{tang}\varphi_2 \cdot \sin(\lambda_3 - \lambda_1) + \operatorname{tang}\varphi_3 \cdot \sin(\lambda_1 - \lambda_2) = 0 \qquad \text{(II)}$$

Man kann die gesuchte Bedingungsgleichung (II) auch ohne Zuhilfenahme der analytischen Geometrie, freilich auf weniger einfache Art, ent-

wickeln. Bezeichnet P den Pol, so ist in den sphärischen Dreiecken $O_1 P O_2$, $O_2 P O_3$ und $O_1 P O_3$ (s. Fig. 15) der Reihe nach

$$\cos O_1 O_2 = \sin\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2 + \cos\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 \cdot \cos(\lambda_1 - \lambda_2)$$
$$\cos O_2 O_3 = \sin\varphi_2 \cdot \sin\varphi_3 + \cos\varphi_2 \cdot \cos\varphi_3 \cdot \cos(\lambda_2 - \lambda_3)$$
$$\cos O_1 O_3 = \sin\varphi_1 \cdot \sin\varphi_3 + \cos\varphi_1 \cdot \cos\varphi_3 \cdot \cos(\lambda_1 - \lambda_3)$$

Da nun arc $O_1 O_3 = \text{arc}\, O_1 O_2 + \text{arc}\, O_2 O_3$ sein muß, so folgt

$$\cos O_1 O_3 = \cos(O_1 O_2 + O_2 O_3) = \cos O_1 O_2 \cdot \cos O_2 O_3 - \sin O_1 O_2 \cdot \sin O_1 O_3,$$

oder

$$\sin\varphi_1 \cdot \sin\varphi_3 + \cos\varphi_1 \cdot \cos\varphi_3 \cdot \cos(\lambda_1 - \lambda_3) = [\sin\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2 + \cos\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 \cdot \cos(\lambda_1 - \lambda_2)] \cdot [\sin\varphi_2 \cdot \sin\varphi_3 + \cos\varphi_2 \cdot \cos\varphi_3 \cdot \cos(\lambda_2 - \lambda_3)]$$
$$- \sqrt{[1 - (\sin\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2 + \cos\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 \cdot \cos(\lambda_1 - \lambda_2))^2] \cdot [1 - (\sin\varphi_2 \cdot \sin\varphi_3 + \cos\varphi_2 \cdot \cos\varphi_3 \cdot \cos(\lambda_2 - \lambda_3))^2]},$$

woraus nach ziemlich umständlichen Rechnungen wieder Formel (II) hervorgeht. Eine Anwendung derselben ermöglicht die

34. Aufgabe. Zwei Schiffe sollen (auf größten Kreisen), das eine von O_1 nach O_3, das andere von O_2 nach O_4 fahren, und die Schiffe sollen sich unterwegs begegnen. Wie lange vor oder nach I muß II abfahren, wenn beide Schiffe dieselbe Geschwindigkeit haben, und wo treffen sie sich? (E. v. Hammer, a. a. O. pag. 483.)

Diese Art, einen Ort O auf der Kugel (vgl. Fig. 15) durch den Durchschnitt zweier größten Kugelkreise zu bestimmen, ist unter dem Namen der Alignementsaufgabe seit Mästlin bekannt, der sie ersann, als er 1572 die Lage eines neuen Sterns ohne jedwedes instrumentelle Hilfsmittel zu bestimmen suchte. Er wählte zu dem Zwecke zwei bekannte Sternpaare O_1, O_3 und O_2, O_4 am Himmel aus, die mit dem gesuchten Stern O jeweils auf einem größten Kreis zu liegen (alignieren) schienen, was mittels eines gespannten Fadens oder Lineals festgestellt wurde. Indessen erforderte bei Mästlin die sukzessive Berechnung der verschiedenen Hilfsdreiecke nicht weniger als 43 Eingänge in die Tafeln. So ist es verständlich, daß Olbers bei seiner Lösung derselben Aufgabe („Den Ort eines Gestirns aus beobachteten Alignements zu finden", Berl. Jahrb. 1822) mit Befriedigung hervorhebt, nur 20 Logarithmen nötig zu haben. In neuerer Zeit wurden Lösungen von S. Günther (vgl. „Ein Ortsbestimmungsproblem der sphärischen Astronomie", Zeitschr. f. Math. u. Phys. 26. Bd. 1881) sowie E. Weiß (vgl. „Über die Bestimmung des Ortes eines Gestirns durch den Durchschnitt zweier größten Kugelkreise", ebenda, im gleichen Bande) gegeben. Die Lösung Günthers ist insofern bemerkenswert, als sie zum Schluß auf Hyperbelfunktionen übergeht. Reiche historische Belehrung über die ganze Frage findet man in R. Wolfs: Handbuch der Astronomie, II. Bd., pag. 122ff.

Seien die gesuchten Koordinaten des Punktes O λ und φ, so gibt die Anwendung der Formel (II) der vorigen Aufgabe sofort die zwei Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{tang}\varphi_1 \cdot \sin(\lambda-\lambda_3)+\operatorname{tang}\varphi \cdot \sin(\lambda_3-\lambda_1)+\operatorname{tang}\varphi_3 \cdot \sin(\lambda_1-\lambda)=0\\ \operatorname{tang}\varphi_2 \cdot \sin(\lambda-\lambda_4)+\operatorname{tang}\varphi \cdot \sin(\lambda_4-\lambda_2)+\operatorname{tang}\varphi_4 \cdot \sin(\lambda_2-\lambda)=0\end{aligned}\right\}. \quad \text{(I)},$$

aus denen λ und φ zu berechnen sind. Wir entwickeln die erste und bekommen

$$\begin{aligned}\operatorname{tang}\varphi_1 \cdot [\sin\lambda \cdot \cos\lambda_3 - \cos\lambda \cdot \sin\lambda_3] + \operatorname{tang}\varphi_3 \cdot [\sin\lambda_1 \cdot \cos\lambda - \cos\lambda_1 \cdot \sin\lambda]\\ + \operatorname{tang}\varphi \cdot \sin(\lambda_3-\lambda_1)=0,\end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned}\sin\lambda \cdot [\operatorname{tang}\varphi_1 \cdot \cos\lambda_3 - \operatorname{tang}\varphi_3 \cdot \cos\lambda_1] + \cos\lambda \cdot [\operatorname{tang}\varphi_3 \cdot \sin\lambda_1 - \operatorname{tang}\varphi_1 \cdot \sin\lambda_3]\\ + \operatorname{tang}\varphi \cdot \sin(\lambda_3-\lambda_1)=0.\end{aligned}$$

Nunmehr setzen wir den Inhalt der ersten eckigen Klammer $= m\cos\alpha$, den der zweiten $= m\sin\alpha$ und haben dann

$$\operatorname{tang}\varphi \sin(\lambda_3-\lambda_1)+m \cdot \sin(\alpha+\lambda)=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(II)}$$

Ganz entsprechend erhält man für die zweite der Gleichungen (I):

$$\operatorname{tang}\varphi \cdot \sin(\lambda_4-\lambda_2)+m_1 \cdot \sin(\alpha_1+\lambda)=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(III)}$$

Wird (II) mit $\sin(\lambda_4-\lambda_2)$, (III) mit $\sin(\lambda_3-\lambda_1)$ multipliziert und dann (III) von (II) subtrahiert, so bleibt nur die eine Unbekannte λ übrig in der Gleichung

$$m \cdot \sin(\lambda_4-\lambda_2) \cdot \sin(\alpha+\lambda) = m_1 \cdot \sin(\lambda_3-\lambda_1) \cdot \sin(\alpha_1+\lambda).$$

Zu ihrer Berechnung schreiben wir

$$\frac{m \cdot \sin(\lambda_4-\lambda_2)}{m_1 \sin(\lambda_3-\lambda_1)} = \frac{\sin(\alpha_1+\lambda)}{\sin(\alpha+\lambda)}$$

und wenden hierauf den Proportionssatz an. Dann wird

$$\begin{aligned}\frac{m \cdot \sin(\lambda_4-\lambda_2)+m_1\sin(\lambda_3-\lambda_1)}{m \cdot \sin(\lambda_4-\lambda_2)-m_1\sin(\lambda_3-\lambda_1)} &= \frac{\sin(\alpha_1+\lambda)+\sin(\alpha+\lambda)}{\sin(\alpha_1+\lambda)-\sin(\alpha+\lambda)}\\ = \frac{\sin(\lambda+\frac{1}{2}(\alpha+\alpha_1)) \cdot \cos\frac{1}{2}(\alpha_1-\alpha)}{\cos(\lambda+\frac{1}{2}(\alpha+\alpha_1)) \cdot \sin\frac{1}{2}(\alpha_1-\alpha)} &= \operatorname{tang}\left(\lambda+\frac{\alpha+\alpha_1}{2}\right) \cdot \operatorname{cotg}\frac{\alpha_1-\alpha}{2}.\end{aligned}$$

Ist hiernach λ gefunden, so liefert jede Gleichung des Systems (I) auch φ. Die Entfernungen OO_1, OO_3 usw. ergeben sich am einfachsten aus dem Kosinussatz, den man nacheinander auf die Dreiecke OPO_1, OPO_3 usw. anwendet. Die für diese Entfernungen gefundene Gradzahl ist mit 111,11 zu multiplizieren, wodurch wir die von den Schiffen (I) und (II) zurückzulegenden Wege in Kilometern finden.

35. Aufgabe. In einem Punkte B der Erdoberfläche erhebe sich ein Aussichtsturm (Berg oder dgl.) zur Höhe q. Die geographischen Koordinaten des Beobachtungsortes B seien λ und φ. In welchen Punkten B_1 und B_2 und C_1 und C_2 schneidet der zur Höhe q gehörige Aussichts- oder Horizontkreis den durch B gehenden Meridian und Parallel?

In Fig. 16 ist $BD=q$ die Verlängerung des Erdradius $MD=r$. Von D ist an die Erdoberfläche der Tangentialkegel gelegt, der dieselbe in dem Kleinkreis BCB_1C_1 schneidet. Diese vier Punkte sind gleichzeitig die Durchschnittspunkte des Kleinkreises mit dem Meridian und Parallel durch den

Mittelpunkt B. Die Punkte B_1 und B_2 haben die Koordinaten λ und φ_1 und φ_2, während diejenigen von C und C_1 φ und λ_1 und λ_2 heißen mögen. Dann gilt es, λ_1, λ_2, φ_1 und φ_2 zu ermitteln. Der sphärische Radius ϱ des Kleinkreises ist leicht zu bestimmen; werden nämlich MD, MB und DE gezogen, so liest man aus dem rechtwinkligen Dreieck MB_1D ab

$$\cos\varrho = \frac{q}{r+q}$$

Somit ist

$$\varphi_1 = \varphi - \arccos\frac{q}{r+q}; \quad \varphi_2 = \varphi + \arccos\frac{q}{r+q} \quad . \; . \; . \quad (I)$$

C_1 und C_2 haben dieselbe Breite wie B, nämlich φ. Zieht man durch diese beiden Punkte von P die Meridiane, so ist $BC_1 = BC_2 = \varrho$ (Großkreisbogen). Der Kosinussatz liefert mithin

$$\begin{aligned}\cos\varrho &= \sin^2\varphi + \cos^2\varphi \cdot \cos(\lambda - \lambda_1)\\ &= \sin^2\varphi + \cos^2\varphi \cdot \cos(\lambda_2 - \lambda)\end{aligned}$$

Daraus folgt sofort

$$\left.\begin{aligned}\lambda_1 &= \lambda - \arccos\frac{\frac{q}{r+q} - \sin^2\varphi}{\cos^2\varphi}\\ \lambda_2 &= \lambda + \arccos\frac{\frac{q}{r+q} - \sin^2\varphi}{\cos^2\varphi}\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (II)$$

Die Formeln (I) und (II) geben die gesuchten geographischen Koordinaten an.

In der trefflichen „Sammlung und Auflösung mathematischer Aufgaben“ von K. H. Schellbach (Berlin 1863) finden sich zwei sehr interessante Beispiele, die Größe des Erdradius r zu bestimmen, die wir deshalb hier wiedergeben wollen.

36. Aufgabe. Die drei Punkte der Erde D, C und E (Fig. 17) liegen auf einem größten Kreise. Man muß in der Verlängerung von ME um die Strecke $EA = a$ emporsteigen, wenn man den Punkt C erblicken will. Um aber D sehen zu können, muß man noch um die Strecke AB höher hinaufsteigen. Es sei $EB = b$. Wie groß ist der Radius der Kugel $MC = r$ und der Winkel $CME = x$, wenn der Winkel $DMC = \alpha$ gegeben ist?

Man erhält nach den eingeführten Bezeichnungen aus den beiden rechtwinkligen Dreiecken ACM und BDM sofort die Gleichungen:

$$\cos x = \frac{r}{r+a} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (I)$$

$$\cos(\alpha + x) = \frac{r}{r+b}, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (II)$$

aus denen x und r zu finden sind. Setzt man nun $\frac{1}{r}=z$, so ergibt sich:

$$\cos x=\frac{1}{1+az}$$

und: $$\cos\alpha\cos x-\sin\alpha\sin x=\frac{1}{1+bz},$$

oder, wenn man $\cos x$ eliminiert:

$$\frac{\cos\alpha}{1+az}-\frac{\sin\alpha\sqrt{2az+a^2z^2}}{1+az}=\frac{1}{1+bz},$$

also:

$$\sin\alpha^2(1+az)^2(1+bz)^2=(1+az)^2-2\cos\alpha(1+az)(1+bz)+(1+bz)^2 \quad \text{(III)}$$

Man findet also z als Wurzel einer Gleichung vierten Grades.

37. Aufgabe. Die Aufgabe wird schwieriger, sobald die Punkte E, C und D nicht mehr auf einem größten Kreise liegen (Fig. 18). Es sei in diesem Falle der Bogen $CD=c$ und das Azimut $CED=\alpha$. Ist wieder $AE=a$ und $AB=b$, bezeichnet man ferner den Bogen EC mit x und ED mit y, so folgt aus dem sphärischen Dreiecke CED:

$$\cos c=\cos x\cos y+\sin x\sin y\cos\alpha. \quad \text{(I)}$$

Ferner folgt aus den rechtwinkligen Dreiecken ACM und BDM:

$$\cos x=\frac{r}{r+a} \quad \text{(II)}$$

und:

$$\cos y=\frac{r}{r+b} \quad \text{(III)}$$

Eliminiert man mit Hilfe von (II) und (III) aus (I) die Winkel x und y, so ergibt sich für r die Gleichung vierten Grades:

$$\cos c=\frac{r^2}{(r+a)(r+b)}+\frac{\cos\alpha}{(r+a)(r+b)}\sqrt{(2ar+a^2)(2br+b^2)}.$$

oder:

$$(r+a)^2(r+b)^2\cos c^2-2r^2(r+a)(r+b)\cos c+r^4$$
$$=(2ar+a^2)(2br+b^2)\cos^2\alpha \quad \text{(IV)}$$

Schellbach führt die Auflösung der Schlußgleichungen mittels der Regula falsi durch und findet auf diese Art für den Erdradius sehr gute Näherungswerte. (Vgl. Schellbach a. a. O. S. 176—180.)

38. Aufgabe. Bei welcher Deklination der Sonne ist an einem Orte der gegebenen Breite φ die vom Endpunkte eines Stabes erzeugte Schattenlinie eine gleichseitige Hyperbel?

Wir gehen aus von der Gleichung (I) der Aufgabe 30, die sich unter Beachtung, daß

$$\sin(\varphi+\delta)\cdot\sin(\varphi-\delta)=\sin^2\varphi-\sin^2\delta$$

und

$$\cos(\varphi+\delta)\cdot\cos(\varphi-\delta)=\cos^2\varphi-\sin^2\delta$$

ist, auch schreiben läßt:

$$y^2\sin^2\delta-x^2\cdot\cos(\varphi+\delta)\cdot\cos(\varphi-\delta)+x\cdot q\cdot\sin 2\varphi-q^2\cdot\sin(\varphi+\delta)\cdot\sin(\varphi-\delta)=0,$$

oder, falls man $90^0-\delta=p$ setzt:

$$y^2\cdot\cos^2 p+x^2\cdot k^2+x\cdot q\cdot\sin 2\varphi+q^2\cdot\cos(\varphi+p)\cdot\cos(\varphi-p)=0\,. \qquad \text{(I)}$$

wo $k^2=\sin(\varphi+p)\cdot\sin(\varphi-p)$ ist.

In dieser Form findet sich die Kegelschnittsgleichung bei R. Wolf: Handbuch der Astronomie, Zürich 1890, I. Bd. pag. 432 angegeben, und so eignet sie sich auch am besten zum Vergleich mit der allgemeinen Gleichung zweiten Grades

$$a\cdot y^2+b\cdot xy+c\cdot x^2+d\cdot y+e\cdot x+f=0 \quad . \; . \; . \; . \qquad \text{(II)}$$

Wenn man jetzt nach Wolf (a. a. O. pag. 194) die Abkürzungen

$$l=\sqrt{(a-c)^2+b^2};\quad g=b^2-4ac \text{ und } h=b\cdot d\cdot e-a\cdot e^2-c\cdot d^2$$

einführt und (II) auf die Hauptachsen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ und den Mittelpunkt transformiert, so daß die Gleichung entsteht

$$\frac{x^2}{\mathfrak{a}^2}+\frac{y^2}{\mathfrak{b}^2}=1\,,$$

so findet man die folgenden Ausdrücke

$$\mathfrak{a}^2=\frac{2(h-f\cdot g)}{g(a+c-l)};\quad \mathfrak{b}^2=\frac{2(h-f\cdot g)}{g(a+c+l)} \quad . \; . \; . \; . \; . \qquad \text{(III)}$$

Durch Vergleich von (I) und (II) findet sich

$$a=\cos^2 p;\; b=0;\; c=k^2;\; d=0;\; e=q\cdot\sin 2\varphi;\; f=q^2\cdot\cos(\varphi+p)\cdot\cos(\varphi-p),$$

womit wir für die Achsen der Schattenlinie aus (III) erhalten

$$\mathfrak{a}=\frac{q}{k^2}\cdot\sin p\cdot\cos p;\quad \mathfrak{b}=\frac{q}{k}\cdot\sin p \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad \text{(IV)}$$

Für eine gleichseitige Hyperbel ist $\mathfrak{a}=\mathfrak{b}$, wodurch aus (IV) wird

$$\cos p=k\,,$$

das ist

$$\sin\delta=\sqrt{\sin(\varphi+p)\cdot\sin(\varphi-p)}=\sqrt{\sin^2\varphi-\cos^2\delta} \quad . \; . \; . \qquad \text{(V)}$$

Da aber für die Hyperbel die Wurzel in (V) imaginär wird (weil wegen $\varphi<90^0-\delta$: $\sin\varphi<\cos\delta$ ist), so muß man, um für $\sin\delta$ einen reellen Wert zu erhalten, schreiben:

$$\sin\delta=\sqrt{\cos^2\delta-\sin^2\varphi}\,,$$

woraus man zieht:

$$\sin\delta=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\cos\varphi\,,$$

oder auch

$$\sin(\pm\delta)=\cos 45^0\cdot\cos\varphi \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad \text{(VI)}$$

Formel (VI) folgt auch aus dem rechtwinkligen sphärischen Dreieck (der Figur 1) PZH, wenn das Azimut 45^0 ist. Dann liegen Sonnenauf- und untergang auf den Winkelhalbierenden der vier Kardinalsrichtungen, d. h. im Nordosten und Nordwesten, bzw. Südosten und Südwesten. Tatsächlich weisen die Asymptoten der hyperbolischen Schattenlinie nach dem Auf- und untergangspunkt, und da die Asymptoten der gleichseitigen Hyperbel aufeinander senkrecht stehen, so müssen sich die Punkte des Auf- und Untergangs in ihrem Azimut um 90^0 unterscheiden.

Die Gleichsetzung von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ in (IV) kann auch einen Kreis als Schattenkurve ergeben. Aus (V) folgt:

$$\sin^2\delta + \cos^2\delta = \sin^2\varphi .$$

Da die Summanden linker Hand für jeden Wert von $\delta = 1$ sind, so folgt daraus $\varphi = \pm 90^0$. Am Pol ist also die Schattenlinie stets ein Kreis.

39. Aufgabe. An welchen Tagen wirft ein freistehender von Ost nach West gerichteter Bretterzaun an einem gegebenen Orte auf einer horizontalen Ebene bei Sonnenschein zu Mittag und Nachmittags 6 Uhr Schatten von gleichen Flächeninhalten[1])?

Hat der Bretterzaun eine Länge von a und eine Höhe von q Metern, so ist der Flächeninhalt seines Schattens beim Durchgang der Sonne durch den Meridian

$$J = a \cdot q \cdot \operatorname{tang}(\varphi - \delta) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (I)$$

Abends 6 Uhr ist der Schlagschatten ein Rhomboid, dessen eine Seite $= a$, dessen andere aber $q \cdot \operatorname{cotg} h_6$ ist, wo h_6 die Sonnenhöhe bei einem Stundenwinkel $s_6 = 90^0$ bedeutet. Zu dieser Zeit hat der Schatten das Azimut α_6 erreicht, welches hervorgeht aus dem Kotangentensatz zu

$$\sin\varphi \cdot \cos 90^0 = \cos\varphi \cdot \operatorname{tang}\delta + \sin 90^0 \cdot \operatorname{cotg}\alpha_6$$

$$\operatorname{cotg}\alpha_6 = -\cos\varphi \cdot \operatorname{tang}\delta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (II)$$

α_6 ist bei positiver Sonnendeklination $> 90^0$. Der Schatten setzt sich also um 6 Uhr abends unter dem Winkel $\alpha_6 - 90^0$ zur Ost-Westlinie an, mithin ist die Höhe des Rhomboids

$$q \cdot \operatorname{cotg} h_6 \cdot \sin(\alpha_6 - 90^0) = -q \cdot \operatorname{cotg} h_6 \cdot \cos\alpha_6 ,$$

folglich sein Inhalt

$$J = -a \cdot q \cdot \operatorname{cotg} h_6 \cdot \cos\alpha_6 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (III)$$

Es ist ferner

$$\sin h_6 = \sin\delta \cdot \sin\varphi + \cos\delta \cdot \cos\varphi \cdot \cos 90^0$$
$$= \sin\delta \cdot \sin\varphi$$

$$\cos h_6 = \frac{\cos\delta}{\sin\alpha_6},$$

[1]) Freundl. briefl. Mitteilung von Herrn Prof. H. Michnik.

mithin $$\operatorname{cotg} h_6 = \frac{\cos\delta}{\sin\alpha_6 \cdot \sin\delta \cdot \sin\varphi}$$

$$= \frac{\cos\delta \cdot \sqrt{1+\cos^2\varphi \cdot \operatorname{tang}^2\delta}}{\sin\delta \cdot \sin\varphi} \quad \ldots\ldots\ldots \text{(IV)}$$

wenn man $\frac{1}{\sin\alpha} = \sqrt{1+\operatorname{cotg}^2\alpha}$ setzt. Aus (II) folgt

$$\cos\alpha_6 = \frac{-\cos\varphi \cdot \operatorname{tang}\delta}{\sqrt{1+\cos^2\varphi \cdot \operatorname{tang}^2\delta}}.$$

Das Minus-Zeichen gilt, weil wir $\alpha_6 > 90^0$ voraussetzen. Berücksichtigt man all dieses, so ergibt die Gleichsetzung von (I) und (III):

$$\operatorname{tang}(\varphi - \delta) = \operatorname{cotg}\varphi$$
$$\varphi - \delta = 90^0 - \varphi$$
$$\delta = 2\varphi - 90^0.$$

Natürlich kann vorstehende Aufgabe auch sehr einfach mittels der Formeln des rechtwinkligen sphärischen Dreiecks gelöst werden. Um 6 Uhr ist der Stundenwinkel $s = 90^0$, und wir haben sofort

$$\cos(180^0 - \alpha_6) = \operatorname{cotg}\varphi \cdot \operatorname{tang} h_6,$$

woraus folgt

$$\operatorname{cotg} h_6 = -\frac{\operatorname{cotg}\varphi}{\cos\alpha_6}.$$

Damit geht (III) über in $J = a \cdot q \cdot \operatorname{cotg}\varphi$, woraus durch Gleichsetzung mit (I) direkt die Schlußgleichung hervorgeht.

40. Aufgabe. Zu welcher Zeit wirft ein Gnomon von dreieckiger Gestalt auf einer Horizontalebene einen Schatten, der dem Gnomon flächengleich ist, falls wiederum die Grundlinie des Dreiecks in der Ost-Westlinie liegt?

Solche Gnomone sind gewöhnlich rechtwinklig. Die eine Kathete q steht senkrecht auf der Horizontalebene, während die Hypotenuse in der Weltachse liegt. (Fig. 19.) Im Schattendreieck ist $FS = q \cdot \operatorname{cotg} h$ und $\sphericalangle NFS =$ dem augenblicklichen Azimut der Sonne, bei welchem diese Flächengleichheit statthat. Nun ist

$$2 \cdot \Delta AF\Sigma = q^2 \cdot \operatorname{cotg}\varphi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(I)}$$
$$2 \cdot \Delta AFS = q^2 \operatorname{cotg} h \cdot \sin(\alpha + 90) \quad \ldots\ldots\ldots \text{(II)}$$

Nun ist

$$\sin h = \sin\delta \cdot \sin\varphi + \cos\delta \cdot \cos\varphi \cdot \cos s$$

$$\cos h = \frac{\sin s \cdot \cos\delta}{\sin\alpha}.$$

Daher

$$\operatorname{cotg} h = \frac{\sin s \cdot \cos\delta}{\sin\alpha(\sin\delta \cdot \sin\varphi + \cos\delta \cdot \cos\varphi \cdot \cos s)},$$

womit durch Gleichsetzung von (I) und (II) für s die Bedingungsgleichung resultiert

$$\operatorname{cotg}\varphi = \frac{\sin s \cdot \cos\delta \cdot \cos\alpha}{\sin\alpha\,(\sin\delta \cdot \sin\varphi + \cos\delta \cdot \cos\varphi \cdot \cos s)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(III)}$$

Setzt man statt $\operatorname{cotg}\alpha$ den aus dem Kotangentensatz folgenden Wert

$$\operatorname{cotg}\alpha = \frac{\cos s \cdot \sin\varphi - \cos\varphi \cdot \operatorname{tang}\delta}{\sin s}$$

ein, so geht (III) über in

$$2\sin\delta \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi + \cos\delta \cdot \cos^2\varphi \cdot \cos s = \cos^2\delta \cdot \sin^2\varphi \cdot \cos,$$

woraus folgt

$$\cos s = -\operatorname{tang}\delta \cdot \operatorname{tang} 2\varphi$$

41. Aufgabe. Man soll für einen Ort innerhalb des Polarkreises ($\varphi > 66\frac{1}{2}^0$) die Dauer des Zeitraumes bestimmen, während welcher die Sonne nicht unter dem Horizont verschwindet oder sich nicht über denselben erhebt.

Eine sehr klare Beantwortung dieser Frage findet man in H. Wagners trefflichem „Lehrbuch der Geographie“ (I. Bd., 9. Aufl., Hannover 1912, pag. 171 und172) mit Hilfe der sog. Schattengrenze. Diese ist, da die Sonne stets die halbe Oberfläche der Erde bestrahlt, ein Großkreis, der im allgemeinen mit keinem Meridian zusammenfällt und deshalb auch nicht durch die Pole geht. Eine Ausnahme findet nur zur Zeit der Äquinoktien statt. Diese Lage der Schattengrenze im Raum wollen wir als ersten Meridian bezeichnen. Da sich dieselbe gemäß der Revolution der Erde um die Sonne aus ihrer anfänglichen Lage im ersten Meridian täglich mehr und mehr herausdreht, so wird sie zu einer beliebigen Zeit außerhalb der Äquinoktien mit dieser einen gewissen Winkel x bilden (Fig. 20), der im Solstitium zu 90^0 angewachsen ist. (Vgl. hierzu die mustergültige Zeichnung in Sydow-Wagners Method. Schulatlas, Tafel II, Fig. 5.) Ist $x = 180^0$ geworden, so ist wieder Tag- und Nachtgleiche, und es hat sich in dem Intervall von $x = 0^0$ bis $x = 180^0$ der ganze Verlauf der Sonnenbestrahlung auf der in diesem Halbjahr beleuchteten Polarkalotte der Erde abgespielt. Da die Schattengrenze bei $x = 90^0$, bzw. 270^0, am meisten vom Erdpole absteht, mithin die Sonne die größte Polarkappe ganz erleuchtet (oder in Nacht läßt), so wird die Größe der beleuchteten Zone und damit die Ausdehnung des Bereiches des ständigen Tages bis zu einer gewissen Poldistanz $90^0 - \varphi$ eine Funktion von x sein. Ist diese Poldistanz ermittelt, so ist die Frage beantwortet, unter welcher Ortsbreite bei einer bestimmten Lage x der Schattengrenze gerade noch ständiger Tag herrscht. Dieses gegebene x bestimmt aber zwei Monatsdaten in den $365\frac{1}{4}$ Tagen des Jahres. Dann ist von diesen so markierten Tagen bis zu den beiden Äquinoktien die Sonne beständig über dem Horizont. Umgekehrt kann man zu einer gegebenen Ortsbreite φ den Winkel x bestimmen. Dann ist es beständig Tag, solange die Schattengrenze den Winkel $2 \cdot (90^0 - x)$ durchwandert.

Um jetzt die Relation zu finden, durch welche x und φ zusammenhängen, sei wiederum auf Fig. 20 verwiesen. Da die Erdachse zur Ekliptik unter einem Winkel von $66\frac{1}{2}^0$ geneigt ist, so schneidet sie sich mit dem Durchmesser, welcher der Schattengrenze angehört, unter einem Winkel von $23\frac{1}{2}^0$; denn die Schattengrenze steht immer senkrecht auf der Ebene der Erdbahn. Da ferner der Pol in der Erdachse liegt, so muß stets die sphärische Entfernung vom Pol bis zur Schattengrenze, auf dem ersten Meridian gemessen, $= 23\frac{1}{2}^0$ sein (die Äquinoktien natürlich ausgenommen). Die kürzeste Entfernung vom Pol bis zur Schattengrenze ist das Lot auf dieselbe. Mithin ist dann jene Kugelkappe ohne Sonnenuntergang, deren sphärischer Radius gleich diesem Lot $= 90^0 - \varphi$ ist. Der Winkel x errechnet sich also aus einem rechtwinkligen sphärischen Dreieck, dessen eine Kathete $= 90^0 - \varphi$, dessen einer Winkel $= x$, und dessen Hypotenuse $= 23\frac{1}{2}^0$ ist, zu

$$\sin x = \frac{\cos \varphi}{\sin 23\frac{1}{2}^0}.$$

Da die Drehung der Schattengrenze um 180^0 sich in unserem Sommerhalbjahr bei dem langsameren Lauf der Erde (Sonnenferne!) in ca. $186\frac{1}{2}$ Tagen vollzieht, so entspricht einer Drehung um 1^0 eine Zeitdauer von etwa 1,036 Tagen. Mit diesem Faktor ist also der Winkel $2 \cdot (90^0 - x)$ zu multiplizieren, um die Zeitdauer zu erhalten, während welcher die Sonne an einem Orte der Breite φ innerhalb des Polarkreises nicht untergeht. Will man hingegen die Zeitdauer erfahren, während welcher die Sonne an demselben Orte nicht aufgeht, so ist derselbe Winkel mit dem Faktor 0,993 zu multiplizieren. Auf der Südhalbkugel sind die Faktoren zu vertauschen.

Zahlenbeispiel: Wie lange geht in Etah, der nördlichsten Ansiedelung der Eskimos, ($\varphi = 78^0$) die Sonne im Sommer nicht unter und im Winter nicht auf, wenn die Strahlenbrechung unberücksichtigt bleibt?

Mit $\varepsilon = 23^0 27'$ findet man $x = 31^0 30'$ und hieraus

$2 \cdot (90^0 - 31\frac{1}{2}^0) \cdot 1{,}036 = 121$ Tage (ständiger Tag)

$2 \cdot (90^0 - 31\frac{1}{2}^0) \cdot 0{,}993 = 116$ Tage (ständige Nacht).

Zahlenbeispiel: Unter welcher geographischen Breite der Nordhemisphäre geht die Sonne 50 Tage lang nicht unter?

Man findet $x = 65^0 53'$ und damit $\varphi = 68^0 42'$.

42. Aufgabe. Wieviel Stunden mehr Sonnenschein als Turin ($\varphi_2 = 45^0$) hat Petersburg ($\varphi_1 = 60^0$) vom Augenblick der Tag- und-nachtgleiche bis zum Eintritt des Solstitiums?

Der halbe Tagbogen drückt sich — positive Sonnendeklination vorausgesetzt, da sonst die Aufgabestellung nicht möglich — für die beiden Breiten aus durch

$$s_1 = \text{arc cos}\,(-\text{tang}\,\delta \cdot \text{tang}\,\varphi_1)$$

und

$$s_2 = \text{arc cos}\,(-\text{tang}\,\delta \cdot \text{tang}\,\varphi_2).$$

Mithin ist die Differenz derselben bei beliebigen δ:

$$\Delta = s_1 - s_2 = \arccos(-\operatorname{tang}\delta \cdot \operatorname{tang}\varphi_1) - \arccos(-\operatorname{tang}\delta \cdot \operatorname{tang}\varphi_2).$$

Die Größe Δ ist eine von δ abhängige Variable, so daß man schreiben kann:

$$\Delta = f(\varphi_1, \varphi_2, \delta) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\mathrm{I})$$

Trägt man δ als Abszisse auf, so ist Δ die zugehörige Ordinate der Kurve, deren Gleichung durch (I) gegeben ist. Die Zeit des Sonnenscheins, den Petersburg an allen Nachmittagen (oder auch Vormittagen) mehr genießt als Turin, ist proportional der Summe aller Ordinaten Δ, die man auf der Abszissenachse errichten kann, während δ alle Werte von 0^0 bis ε^0 durchläuft. Sämtliche $\Delta =$ Werte machen aber die Fläche aus, die Δ zwischen den Intervallen $\delta = 0$ und $\delta = 23^0 27'$ bestreicht. Folglich hat man für die Summation all der Differenzen das bestimmte Integral zu nehmen

$$\int_0^{\varepsilon} \Delta\, d\delta = \int_0^{\varepsilon} f(\varphi_1, \varphi_2, \delta)\, d\delta = \int_0^{\varepsilon} \arccos(-\operatorname{tang}\varphi_1 \cdot \operatorname{tang}\delta)\, d\delta$$

$$- \int_0^{\varepsilon} \arccos(-\operatorname{tang}\varphi_2 \cdot \operatorname{tang}\delta)\, d\delta.$$

Analog wie in Aufgabe (29) entwickeln wir die Arcusfunktionen unter den Integralzeichen in Potenzreihen und brechen dieselben beim zweiten Gliede wegen der Kleinheit von $\operatorname{tang}\delta$ ab. Dann wird

$$\int_0^{\varepsilon} \Delta\, d\delta = \int_0^{\varepsilon} [(\operatorname{tang}\varphi_1 - \operatorname{tang}\varphi_2)\operatorname{tang}\delta + \tfrac{1}{6}(\operatorname{tang}^3\varphi_1 - \operatorname{tang}^3\varphi_2)\operatorname{tang}^3\delta]\, d\delta \quad (\mathrm{II})$$

Der erste Summand rechter Hand hat den Wert

$$(\operatorname{tang}\varphi_1 - \operatorname{tang}\varphi_2)(-l\cos\varepsilon) = (\operatorname{tang}\varphi_2 - \operatorname{tang}\varphi_1)\, l\cos\varepsilon$$

Um $\int \operatorname{tang}^3\delta\, d\delta\, d\delta$ zu bestimmen, setzen wir $\operatorname{tang}\delta = u$, also $d\delta = \dfrac{du}{1+u^2}$, wodurch man erhält:

$$\int \operatorname{tang}^3\delta\, d\delta\, d\delta = \int \frac{u^3 \cdot du}{1+u^2} = \int u\, du - \int \frac{u}{1+u^2} \cdot du$$

$$= \tfrac{1}{2}u^2 - \tfrac{1}{2}\int \frac{d(1+u^2)}{1+u^2}$$

$$= \tfrac{1}{2}u^2 - \tfrac{1}{2}l(1+u^2)$$

$$= \tfrac{1}{2}\operatorname{tang}^2\delta - \tfrac{1}{2}l(1+\operatorname{tang}^2\delta)$$

$$= \tfrac{1}{2}\operatorname{tang}^2\delta + l\cos\delta$$

Damit geht (II) über in

$$\int_0^{\varepsilon} \Delta\, d\delta = (\operatorname{tang}\varphi_2 - \operatorname{tang}\varphi_1)\, l\cos\varepsilon + \tfrac{1}{6}(\operatorname{tang}^3\varphi_1 - \operatorname{tang}^3\varphi_2)\,(\tfrac{1}{2}\operatorname{tang}^2\varepsilon + l\cos\varepsilon) \quad (\mathrm{III})$$

Mit den Werten:

$$\operatorname{tang}\varphi_1 = \sqrt{3} = 1{,}732;\ \operatorname{tang}^3\varphi_1 = 5{,}196;\ \operatorname{tang}\varphi_2 = \operatorname{tang}^3\varphi_2 = 1;$$
$$l\cos\varepsilon = -0{,}086;\ \tfrac{1}{2}\operatorname{tang}^2\varepsilon = 0{,}093$$

erhält man aus (III):

$$\int_0^{\varepsilon} \Delta\, d\delta = 1{,}856 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(IV)}$$

Diese letztere Gleichung kann aber auch folgendermaßen gedeutet werden: Wird eine Arcusfunktion s nach δ integriert, so beschreibt das Kreisstück s ein Band der Kugeloberfläche mit der Breite ε. Die Frage ist nun: Welche Größe hat ein Kreisbogen s, der durch $23^0 27'$ hingleitend, auf der Einheitskugel einen Streifen vom Flächeninhalt 1,856 bildet? Dieser mittlere Bogen ist in Linearmaß gegeben durch

$$\frac{180^0}{23\frac{1}{2}^0} \cdot \frac{1{,}856}{3{,}14} \cdot 2{,}25, \text{ oder in Gradmaß durch}$$

$$90^0 \cdot \frac{2{,}25}{1{,}57} = 1{,}43 \cdot 90^0 = 128^0,$$

wie eine leichte Proportionsrechnung zeigt. Mithin hat die Hälfte dieses mittleren (täglichen) Bogens einen Überschuß von rund $128^0 - 90^0 = 38^0$ über einen Quadranten, welch letzterer zur Zeit des Äquinoktiums beiden Orten als halber Tagbogen zukommt. In Zeit verwandelt sind $38^0 = 2^h 32^m$. Durchläuft dieser Bogen den Weg von $23^0 27'$, so wird ein zeitlicher Überschuß von $59^h 24^m$ erzielt. So viele Stunden Sonnenschein hat demnach Petersburg am Vor- oder Nachmittag aller Frühlingstage mehr als Turin, mithin insgesamt $2 \cdot 59^h 24^m = 118^h 48^m$, das ist nahezu fünf Tage.

Wir haben zur Kontrolle folgende Probe gemacht: Wir berechneten die tägliche Sonnenscheindauer für Petersburg und Turin, indem wir $\delta = \frac{1}{2}^0$, 1^0, $1\frac{1}{2}^0$, 2^0 usw. bis $23\frac{1}{2}^0$ in die Formel $\cos s = -\operatorname{tang}\varphi \cdot \operatorname{tang}\delta$ einsetzten; wodurch wir 47 Wertepaare für die Tageslänge (= Sonnenscheindauer) erhielten. Da das Frühjahr ca. 93 Tage hat, wurde jeder Unterschied zweier entsprechenden Wertepaare doppelt genommen, wodurch dem Flächeninhalt $\int_0^{\varepsilon} \Delta\, d\delta$ der Kurve 47 sehr schmale Paralleltrapeze substituiert wurden. Ihre Summation mußte daher etwas weniger ergeben als die Integration, da die höheren als dritten Potenzen in der Formel (II) das Resultat fast gar nicht beeinflussen können. So ergab denn diese näherungsweise Quadratur $58^h 50^m$, was mit dem Integralwert, der aus (IV) abgeleitet ist, nur um 34^m differiert.

43. Aufgabe. Man soll die Zeit aus dem Winkel bestimmen, welchen ein zwei Sterne verbindender größter Kreis mit dem Vertikalkreis bildet.

Als Beispiel für diese Art der Zeitbestimmung findet man bei Rümker (a. a. O. pag. 160, 161) das „Kreuz des Südens“ verwendet. Dieses

durch seine auffallende Gestalt ausgezeichnete Sternbild besteht aus den vier Sternen α, β, γ und δ Crucis. Wenn man durch die Pole P und P_1, sowie den Stern α einen größten Kreis zieht, ferner α mit γ durch einen Großkreisbogen verbindet, so schließen die zwei so fixierten Großkreise einen konstanten Winkel c ein. (In Fig. 21 sind die größten Kreise $P_1\alpha$ und $\alpha\gamma$ gradlinig gezeichnet.) Der Stern α habe die südliche Deklination δ und werde auf dem Parallel BB_1 um den Südpol herumgeführt. Aus der Unveränderlichkeit des Winkels c folgt, daß das Kreuz an verschiedenen Stellen in seiner täglichen Bahn alle möglichen Neigungen einnimmt, mithin der Winkel w, den der Verbindungskreis $\alpha\gamma$ zum Vertikalkreis bildet, veränderlich und daher geeignet ist für die Bestimmung der Sternzeit und damit auch der mittleren Zeit. Der Kotangentensatz gibt für das sphärische Dreieck NP_1D:

$$\sin s \cdot \operatorname{cotg}(w + c) = \operatorname{tang}\varphi \cdot \cos\delta + \sin\delta \cdot \cos s \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(I)}$$

Nun werde von P_1 auf den Vertikal ZDN das Lot P_1D_1 gefällt; dann folgt aus dem rechtwinkligen Dreieck PD_1D:

$$\operatorname{cotg}(w + c) = \operatorname{tang} b \cdot \sin\delta,$$

womit aus (I) wird:

$$\sin s \cdot \operatorname{tang} b \cdot \sin\delta = \operatorname{tang}\varphi \cdot \cos\delta + \sin\delta \cdot \cos s,$$

$$\sin\delta(\sin s \cdot \sin b - \cos s \cdot \cos b) = \operatorname{tang}\varphi \cdot \cos\delta \cdot \cos b$$

$$\cos(s + b) = \operatorname{tang}\varphi \cdot \operatorname{cotg}\delta \cdot \cos b \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(II)}$$

woraus man den Stundenwinkel s für die Sternzeit in logarithmischer Form findet. Alles übrige erledigt sich wie in Aufgabe 15.

V. Abschnitt.

Geometrische Örter.

44. Aufgabe. Welche Kurve beschreibt das Ende des Schattens eines vertikalen Stabes der Höhe q während eines Tageslaufs der Sonne auf eine horizontale Ebene?

Schon der Araber Tabit ben Qorra (826—901) soll jene Linien studiert haben, „quas gnomonetrum styli apicis umbra percurrit", wie Gerhard von Cremona (1114—1187) aus der Schrift Tabits: de horometria schließt. Sie stehen in engem Zusammenhang mit den Sonnenuhren der Araber, bei denen der Zeiger oder Stylus stets senkrecht zur Uhrebene gerichtet war[1]).

Sei Σ (Fig. 19) die Stabspitze, welche der Sonnenstrahl ΣS durchsetzt, so ist FS der Schlagschatten des Stabes und S ein Punkt der Schattenkurve, deren Hauptachse die Nord-Südlinie ist, weil sich auf derselben der Scheitel B der Kurve befindet, der dem Augenblick der Sonnenkulmination entspricht. Die Koordinaten von S sind x und y. Da die Schattenrichtung vom Azimut der Sonne bedingt wird, so ist $\measuredangle SFC = \alpha$. Aus dem bei C rechtwinkligen Dreieck SFC liest man ab:

$$y = FS \cdot \sin\alpha,$$

und aus dem bei F rechtwinkligen Triangel $SF\Sigma$

$$FS = q \cdot \operatorname{cotg} h,$$

wo h die augenblickliche Sonnenhöhe ist. Damit wird

$$y = q \cdot \operatorname{cotg} h \cdot \sin\alpha \quad \ldots\ldots\ldots \quad (I)$$

Nach dem Sinussatz hat man im Zenit—Pol—Sonnedreieck:

$$\sin\alpha = \frac{\cos\delta \cdot \sin s}{\cos h} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (II)$$

und nach dem Kosinussatz:

$$\sin h = \sin\delta \cdot \sin\varphi + \cos\delta \cdot \cos\varphi \cdot \cos s \quad \ldots\ldots \quad (III)$$

Durch Einsetzen des Wertes von $\sin\alpha$ aus (II) wird (I) zu

$$y = q \cdot \frac{\cos\delta \cdot \sin s}{\sin h},$$

[1]) Vgl. C. Schoy: „Arabische Gnomonik" (Aus d. Archiv d. Deutschen Seewarte, 1913).

und wenn man jetzt noch $\sin h$ durch den Ausdruck (III) ersetzt:

$$y = q \cdot \frac{\cos\delta \cdot \sin s}{\sin\delta \cdot \sin\varphi + \cos\delta \cdot \cos\varphi \cdot \cos s} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(IV)}$$

Ferner ist $\frac{x}{y} = \operatorname{cotg}\alpha$

$$x = y \cdot \operatorname{cotg}\alpha = q \cdot \frac{\cos\delta \cdot \sin s \cdot \operatorname{cotg}\alpha}{\sin\delta \cdot \sin\varphi + \cos\delta \cdot \cos\varphi \cdot \cos s} \quad . \quad . \quad . \quad \text{(IVa)}$$

Der Kotangentensatz gibt aber

$$\operatorname{cotg}\alpha = \frac{\cos s \cdot \sin\varphi - \cos\varphi \cdot \operatorname{tang}\delta}{\sin s}$$

Wenn man diesen Wert von $\operatorname{cotg}\alpha$ in (IVa) einsetzt und Zähler und Nenner mit $\cos\delta$ durchmultipliziert, so folgt

$$x = q \cdot \frac{\cos s \cdot \sin\varphi \cdot \cos\delta - \cos\varphi \cdot \sin\delta}{\sin\delta \cdot \sin\varphi + \cos\delta \cdot \cos\varphi \cdot \cos s} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(V)}$$

Eliminiert man nunmehr die Variable s, so hat man die zu jeder Zeit gültige, d. h. von der Zeit unabhängige Gleichung in x und y. Es ist dies die schon in Aufgabe 30 angeführte Kegelschnittsgleichung

$$y^2 \cdot \sin^2\delta + x^2 \cdot (\sin^2\delta - \cos^2\varphi) + q \cdot \sin 2\varphi \cdot x + q^2 \cdot (\sin^2\delta - \sin^2\varphi) = 0,$$

oder

$$y^2 \cdot \sin^2\delta - x^2 \cdot \cos(\varphi - \delta) \cdot \cos(\varphi + \delta) + q \cdot \sin 2\varphi \cdot x$$
$$- q^2 \cdot \sin(\varphi - \delta) \cdot \sin(\varphi + \delta) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(VI)}$$

Die Achsen sind bereits in Aufgabe 38 angegeben.

Um zu entscheiden, welcher Art der durch (VI) definierte Kegelschnitt ist, bedenke man, daß eine auf- und untergehende Sonne zwei unendlich lange Schatten, also zwei unendlich ferne Punkte erzeugt; mithin in diesem Fall die Schattenlinie eine Hyperbel ist, daß ferner eine um Mitternacht den Horizont gerade berührende Sonne einen unendlich fernen Punkt, d. h. eine Parabel erzeugt, und daß endlich bei Mitternachtssonne jeder Schattenpunkt im Endlichen liegt, d. h. die Kurve ein geschlossener Kegelschnitt (Ellipse) ist. Wie aber aus einer Orthogonalprojektion der Himmelskugel auf den Meridian leicht ersichtlich ist, muß

im 1. Fall $\varphi + \delta < 90^0$
„ 2. „ $\varphi + \delta = 90^0$
„ 3. „ $\varphi + \delta > 90^0$

sein.

Für $\delta = 0^0$ (Tag des Äquinoktiums) wird (VI) zu

$$x^2\cos^2\varphi - 2q \cdot x \cdot \sin\varphi + q^2 \cdot \sin^2\varphi = 0$$

oder

$$x\cos\varphi - q\sin\varphi = 0,$$
$$x = q \cdot \operatorname{tang}\varphi \quad . \quad . \quad \text{(VII)}$$

d. h. der Kegelschnitt geht in eine gerade Linie über, die parallel der X-Achse (Ost-Westlinie) zieht.

45. Aufgabe. Den geometrischen Ort aller Punkte anzugeben, in welchen der Stundenwinkel der Sonne während des ganzen Jahres eine gegebene Größe hat.

Der fragliche Ort ist auf der Sphäre ein Meridian, der von Pol zu Pol zieht. Auf ihm befindet sich die Sonne das ganze Jahr beim Stundenwinkel s, gleichviel, welches ihre Deklination sei. Der Durchschnitt eines Großkreises mit der Ebene ist stets eine gerade Linie, und eine solche muß daher auch der zu erwartende geometrische Ort in der Ebene sein. Da er für das ganze Jahr gültig ist, so muß die Gleichung desselben von der Sonnendeklination unabhängig sein. Man findet die Gleichung also durch Elimination von δ aus (IV) und (V) der vorigen Aufgabe. Dazu dividiert man erst in beiden rechter Hand Zähler und Nenner durch $\cos\delta$, wodurch nur noch $\operatorname{tang}\delta$ vorkommt. Rechnet man $\operatorname{tang}\delta$ aus (IV) heraus, so hat man

$$\operatorname{tang}\delta = \frac{q \cdot \sin s - y \cdot \cos\varphi \cdot \cos s}{y \cdot \sin\varphi},$$

welcher Ausdruck in (V) eingesetzt

$$y = x \cdot \operatorname{tang} s - q \cdot \cos\varphi \cdot \operatorname{tang} s \quad \ldots\ldots \quad \text{(I)}$$

folgen läßt. (I) ist aber die Gleichung einer geraden Linie.

46. Aufgabe. Man soll einen Ausdruck für die Geschwindigkeit aufstellen, mit welcher das Ende des Schlagschattens eines Stabes die tägliche Schattenkurve durcheilt.

Diese Geschwindigkeit c ist an jedem Punkte der Projektion der Sonnenbahn auf den Horizont verschieden: sie ist am kleinsten im Scheitel der Kurve (Mittag) und wird bei Sonnenuntergang unendlich groß. Der Ausdruck für c wird für eine gegebene Sonnendeklination und Polhöhe wesentlich vom Stundenwinkel s abhängen, so daß man setzen kann

$$c = f(\delta, \varphi, s) \quad \ldots\ldots \quad \text{(I)}$$

Aus der Lehre von der Bewegung ist für die Geschwindigkeit eines Punktes in der Bahn die Formel bekannt

$$c = \sqrt{\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2} \quad \ldots\ldots \quad \text{(II)}$$

wo x und y dessen rechtwinklige Koordinaten bedeuten, s aber die Zeit vorstellt. Um nun die Differentialquotienten $\frac{dx}{ds}$ und $\frac{dy}{ds}$ zu bestimmen, differentiieren wir die Gleichungen (IV) und (V) der Aufgabe 44 nach s und finden

$$\frac{dx}{ds} = -q \cdot \frac{\sin^2\varphi \sin\delta\cos\delta \cdot \sin s + \sin\delta \cdot \cos\delta \cdot \cos^2\varphi \cdot \sin s}{\sin^2 h}$$

$$= -q \cdot \frac{\frac{1}{2}\sin 2\delta \cdot \sin s}{\sin^2 h} \quad \ldots\ldots \quad \text{(III)}$$

wenn man der Kürze halber im Nenner $\sin h$ statt $\sin\delta \cdot \sin\varphi + \cos\delta \cdot \cos\varphi \cdot \cos s$ setzt. Ebenso folgt

$$\frac{dy}{ds} = q \cdot \frac{\cos\delta(\cos\delta \cdot \cos\varphi + \sin\delta \cdot \sin\varphi \cdot \cos s)}{\sin^2 h} \quad \ldots\ldots \text{(IV)}$$

Quadriert man (III) und (IV) und addiert, so erhält man

$$c^2 = \frac{q^2}{\sin^4 h}[\sin^2\delta\cos^2\delta\sin^2 s + \cos^2\delta(\cos\delta\cos\varphi + \sin\delta\sin\varphi\cos s)^2],$$

woraus nach gehöriger Reduktion folgt

$$c = \frac{q \cdot \cos\delta}{(\sin\delta\sin\varphi + \cos\delta\cos\varphi\cos s)^2} \cdot \sqrt{\sin^2\delta\cos^2\varphi\sin^2 s + \sin^2\delta\sin^2\varphi + \cos^2\delta\cos^2\varphi + \tfrac{1}{2}\sin 2\varphi\sin 2\delta\cos s}$$

$$= \frac{q \cdot \cos\delta}{(\sin\delta\sin\varphi + \cos\delta\cos\varphi\cos s)^2} \cdot \sqrt{\sin^2\delta\cos^2\varphi\sin^2 s + \tfrac{1}{2}[\cos^2(\delta+\varphi) + \cos^2(\delta-\varphi)] + \tfrac{1}{2}\sin 2\varphi\sin 2\delta\cos s} \quad \text{(V)}$$

Setzt man in (V) $s = 0$, so erhält man

$$c_0 = \frac{q \cdot \cos\delta}{\cos^2(\varphi-\delta) \cdot \sqrt{2}} \cdot \sqrt{\cos^2(\delta+\varphi) + \cos^2(\delta-\varphi) + \sin 2\varphi \cdot \sin 2\delta} \quad \text{(Va)}$$

für die Geschwindigkeit im Scheitel der Kurve. Wird $s = 90^0$ angenommen, so ergibt sich

$$c_6 = \frac{q \cdot \cos\delta}{\sin^2\delta\sin^2\varphi} \cdot \sqrt{\sin^2\delta + \cos^2\delta\cos^2\varphi} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(Vb)}$$

Für das Äquinoktium ($\delta = 0$) endlich gibt (V):

$$c_{\delta_0} = \frac{q}{\cos^2 s \cdot \cos\varphi} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(Vc)}$$

Eine Anwendung von Formel (Vc) machen wir in der

47. Aufgabe. Eine Straße, die genau von Nord nach Süd zieht, hat eine Breite von 20 m. Die nach West gewandte Seite ist mit Bäumen von durchschnittlich 10 m Höhe bepflanzt, während die Ostfront mit Häusern bebaut ist. Zu welchem Zeitpunkt des Nachmittags beginnt an einem Äquinoktialtage der Schatten der Bäume eben die senkrechten Wände der Häuser von unten nach oben zu überziehen, die geographische Breite zu $\varphi = 45^0$ vorausgesetzt?

Wie Aufgabe 44, Formel (VII) zeigt, ist die Schattenspur für $\delta = 0$ eine zur Ost-Westrichtung parallele Gerade, die im Abstand $q \cdot \operatorname{tang}\varphi = 10 \cdot \operatorname{tang} 45^0 = 10\,m$ vom Fußpunkt eines Baumes, der in diesem Falle Gnomon ist, die Straße senkrecht durchschneidet. Im Augenblick des Mittags fallen alle Schatten in die Nord-Südlinie, die Straße ist dann schattenlos. Der Schatten bestreicht von diesem Moment ab in seiner Spitze die Breite der Straße $BC = 20\,m$ (Fig. 22), welche Strecke durchaus nicht identisch ist mit der Länge des Schlagschattens eines Baumes. Dieser reicht vom Fuß F bis nach B, bzw. C. Um den Weg BC zu beschreiben, muß die Geschwindigkeit c durch

die Zeit zur Strecke auswachsen, m. a. W., man muß die Geschwindigkeit nach der Zeit integrieren. Da wir diese vom Mittag an zählen, so sind die Grenzen des zu nehmenden Integrals 0 und s Nach (Vc) muß sein

$$BC = 20m = \int_0^s c \cdot ds = q \cdot \int_0^s \frac{ds}{\cos\varphi \cdot \cos^2 s},$$

$$20 = \frac{10}{\cos 45^0} \int_0^s \frac{d}{ds}(\operatorname{tang} s)$$

$$20 = 10\sqrt{2} \cdot \operatorname{tang} s$$

$$\sqrt{2} = 1{,}4142 = \operatorname{tang} s$$

$$54^0 45' = s \text{ (abgerundet)}$$

das ist

$$3^h 39^m = t \text{ (Zeit des Nachmittags.)}$$

Es bedarf kaum des Hinweises, daß man vorstehende Aufgabe auch ohne Integralrechnung lösen kann.

Frage: Was versteht man unter Temporärstunden und temporären Stundenlinien? Unter einer Temporärstunde versteht man den zwölften Teil des Zeitraums, der zwischen Auf- und Niedergang der Sonne verfließt. Teilt man also alle Tagbogen der Sonne stets in zwölf gleiche Teile, und verbindet entsprechende Teilpunkte durch einen stetigen Linienzug, so hat man auf dem Globus eine sphärische temporäre Stundenlinie, aus der man durch Zentralprojektion auf die Ebene die eigentlichen temporären Stundenlinien erhält, wie sie das Zifferblatt einstiger Sonnenuhren zeigte, wennschon sie dort fälschlicherweise als gerade Linien wiedergegeben wurden. Bei den Alten herrschte durchweg die temporäre Stunde. Erst bei dem arabischen Astronomen Al-Battâni († 936) werden auch die gleichen oder äquinoktialen Stunden erwähnt, deren jede einem Stundenwinkel von 15 Grad entspricht. Aber zur praktischen Anwendung hat sie (neben den temporären) erst der Marokkaner Abul-Hassan gebracht.

48. Aufgabe. Man soll einen Ausdruck für die Dauer einer Temporärstunde finden.

Aus der Formel

$$\cos s_0 = -\operatorname{tang}\delta \cdot \operatorname{tang}\varphi$$

folgt

$$s_0 = \operatorname{arc\,cos}(-\operatorname{tang}\varphi \cdot \operatorname{tang}\delta),$$

mithin ist der zu einer Temporärstunde gehörige Stundenwinkel

$$\frac{s_0}{6} = \frac{1}{6} \operatorname{arc\,cos}(-\operatorname{tang}\varphi \cdot \operatorname{tang}\delta).$$

Die Dauer einer solchen Stunde findet man daher, wenn man $\frac{s_0}{6}$ in Zeit verwandelt. Setzt man den Radius eines Kreises gleich der Einheit, so kommt auf 360^0 der ganze Kreisumfang oder 2π als Bogen, folglich ist der Stundenwinkel einer äquinoktialen Stunde $= \frac{2\pi}{24} = \frac{\pi}{12}$. Man hat daher folgende Proportion:

$$\frac{\text{Tempor. Stunde}}{\text{Äquinokt. Stunde}} = \frac{\arccos(-\operatorname{tang}\varphi \cdot \operatorname{tang}\delta)}{6} : \frac{\pi}{12},$$

also ist

$$1 \text{ Tempor. Stunde} = \frac{2 \arccos(-\operatorname{tang}\varphi \cdot \operatorname{tang}\delta)}{\pi} \cdot 1 \text{ äquinokt. Stunde},$$

und wenn man die äquinoktiale Stunde zur Zeiteinheit wählt:

$$\text{Tempor. Stunde} = \frac{2 \arccos(-\operatorname{tang}\varphi \cdot \operatorname{tang}\delta)}{\pi} \quad \ldots\ldots \quad \text{(I)}$$

Zum praktischen Gebrauch verwandeln wir (I) in eine Potenzreihe, unter Beachtung, daß $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$ und

$$\arcsin x = x + \tfrac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} + \ldots$$

ist. Dann hat man

$$\text{Tempor. Stunde} = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} + \operatorname{tang}\varphi \cdot \operatorname{tang}\delta + \frac{1}{6}\operatorname{tang}^3\varphi \cdot \operatorname{tang}^3\delta + \ldots\right)$$

$$= 1 + \frac{2}{\pi} \cdot \operatorname{tang}\varphi \cdot \operatorname{tang}\delta + \frac{1}{3\pi}\operatorname{tang}^3\varphi \cdot \operatorname{tang}^3\delta + \ldots \quad \text{(II)}$$

Diese Reihe konvergiert stark, wenn δ klein und auch $\operatorname{tang}\varphi > 1$ ist. So konvergiert nicht für $\operatorname{tang}\varphi \cdot \operatorname{tang}\delta \geqq 1$. In diesem Fall ist eine temporäre Stunde zwei äquinoktialen gleich, weil Mitternachtssonne herrscht.

49. Aufgabe. Man soll die Gleichung einer temporären Stundenlinie in der Ebene aufstellen. Eine Ableitung derselben ist von uns in aller Strenge zum erstenmal in unserer Arabischen Gnomonik gegeben. Am eingehendsten hatte sich bislang wohl Delambre mit diesem Gegenstand befaßt in seiner Histoire de l'astronomie ancienne, tome II, pag. 476—482, wo es u. a. heißt: „Voyons maintenant, s'il est vrai que les lignes des heures temporaires sont toujours des lignes droites, ou ce qui revient au même, si les courbes horaires sur la sphère sont toujours des arcs du grand cercle, ainsi que tous les auteurs le supposent tacitement.

Commandin et Clavius ont essayé de démontrer qu'en effet les arcs horaires appartiennent à des grands cercles. Montucla a dit, et Lalande a répété d'après lui, que les lignes horaires sont des courbes assez bizarres, et qu'on ne peut décrire exactement qu'en déterminant un grand nombre de points.“ Da aber die Araber diese Kurven durch gerade Linien ersetzten,

so ist Delambre darauf geführt worden, zu untersuchen, wie groß der dabei begangene Fehler war. Er findet ihn bei der Deklination, welche die Sonne erreichen kann und in den verhältnismäßig niederen Breiten, innerhalb deren sich das mohammedanische Reich erstreckte, durchweg gering. Indem er diese sonderbaren Linien aber weiter verfolgte, erkannte er, daß sie die Gestalt eines Integralzeichens haben. Zeichnungen und mathematische Ableitungen gibt Delambre nicht bei, wiewohl er solche für sich ausgeführt haben muß.

Für eine kurze Herleitung der Gleichung gehen wir auf die Formeln (IV) und (V) der Aufgabe 44 zurück. Sie bestimmen zusammen die Koordinaten eines Punktes der Tageshyperbel, der zu einem gewissen Stundenwinkel s der Sonne gehört. Wählt man diesen Winkel s so, daß er $= \frac{s_0}{6}, \frac{s_0}{3}, \frac{s_0}{2}, \frac{2s_0}{3}$ und $\frac{5s_0}{6}$ wird, so sind x und y der genannten Formeln die Koordinaten eines Punktes der 1., 2., 3., 4. und 5. Temporärstundenlinie. Durch nachherige Elimination von δ erhält man die für alle Punkte einer solchen Kurve gültige Gleichung, die aber wegen ihres sehr hohen Grades in kartesischen Koordinaten nicht diskutabel ist. Wie aus den Formeln (IV) und (V) der 44. Aufgabe ersichtlich, kommt die Variable s in der Sinus- und Kosinusfunktion vor. Es gilt also aus

$$\cos s_0 = -\operatorname{tang}\delta \cdot \operatorname{tang}\varphi$$

$\sin\frac{s_0}{6}$, $\cos\frac{s_0}{6}$; $\sin\frac{s_0}{3}$, $\cos\frac{s_0}{3}$; $\sin\frac{s_0}{2}$, $\cos\frac{s_0}{2}$ usw. zu berechnen und in die schon genannten Gleichungen der 44. Aufgabe einzusetzen. Dies ist im allgemeinen nicht einfach. Am ehesten ist es noch angängig, die Gleichung für die dritte Stundenlinie aufzustellen, wo $s = \frac{s_0}{2}$ wird. Man hat nämlich

$$\cos s_0 = \cos^2\frac{s_0}{2} - \sin^2\frac{s_0}{2}$$

$$= 2\cos^2\frac{s_0}{2} - 1$$

$$= 1 - 2\sin^2\frac{s_0}{2} = -\operatorname{tang}\varphi \cdot \operatorname{tang}\delta.$$

Mithin folgt

$$\sin\frac{s_0}{2} = \sqrt{\frac{1 + \operatorname{tang}\varphi \cdot \operatorname{tang}\delta}{2}}$$

$$\cos\frac{s_0}{2} = \sqrt{\frac{1 - \operatorname{tang}\varphi \cdot \operatorname{tang}\delta}{2}}$$

Setzt man diese Werte in die schon oft genannten Ausdrücke (IV) und (V) statt $\sin s$ und $\cos s$ ein, so findet man, wenn man vorher noch Zähler und Nenner der rechten Seiten mit $\cos\delta$ durchdividiert hat, folgende Parameterdarstellung für die dritte Stundenlinie:

$$\left.\begin{aligned} x &= q \cdot \frac{\sin\varphi \cdot \sqrt{\frac{1-\operatorname{tang}\varphi\cdot\operatorname{tang}\delta}{2}} - \cos\varphi\cdot\operatorname{tang}\delta}{\sin\varphi\cdot\operatorname{tang}\delta + \cos\varphi\cdot\sqrt{\frac{1-\operatorname{tang}\varphi\cdot\operatorname{tang}\delta}{2}}} \\ y &= q \cdot \frac{\sqrt{\frac{1+\operatorname{tang}\varphi\cdot\operatorname{tang}\delta}{2}}}{\sin\varphi\cdot\operatorname{tang}\delta + \cos\varphi\cdot\sqrt{\frac{1-\operatorname{tang}\varphi\cdot\operatorname{tang}\delta}{2}}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (\mathrm{I})$$

In dieser Form sind die Gleichungen diskutabel, während die Elimination von $\operatorname{tang}\delta$ auf eine sehr komplizierte Gleichung vom 8. Grade in x und y führt. Wir haben in der Arabischen Gnomonik das System (I) eingehend studiert und durch Figuren illustriert. Hier müssen wir uns mit einem Hinweis auf diese Abhandlung beschränken.

Man kann aber auch ganz allgemein aus $\cos s_0 = -\operatorname{tang}\varphi\cdot\operatorname{tang}\delta\ \sin\frac{m}{n}s_0$ und $\cos\frac{m}{n}s_0$ berechnen, wenn man vom Moivreschen Satz ausgeht.

Man hat dann: (Siehe Formel S. 78)

50. Aufgabe. Die Araber ersetzten die temporären Stundenlinien durch Gerade. Man soll zeigen, daß dies für δ zwischen den Grenzen $\pm\varepsilon$ annähernd richtig war.

Bei der graphischen Darstellung der temporären Stunden fällt auf, daß die Stundenlinien innerhalb der möglichen Sonnendeklinationen nur ganz schwach gekrümmt sind und sich sehr stark an jene Tangente anschmiegen, die man an die Kurve im Punkte $\delta = 0^0$ (Äquinoktium) konstruieren kann. Dies trifft um so mehr zu, je kleiner die geographische Breite φ ist. Da sich das Reich der Araber aber hauptsächlich in der subtropischen Zone ausbreitete, so war, speziell für die arabischen Astronomen, der begangene Fehler sehr gering.

Um dies durch die Rechnung zu bestätigen, bestimmen wir am besten den Neigungswinkel der Tangenten an die Stundenlinien und berechnen seinen Betrag für kleinere Werte von δ. Ergeben sich dabei keine bedeutenden Unterschiede, so ist damit dargetan, daß der Lauf der Kurve in dem für δ in Frage kommenden Gebiet von einer geraden Linie nicht wesentlich abweicht. Freilich ist diese Rechnung mit Hilfe des Formelsystems (II) der 49. Aufgabe viel zu verwickelt, um hier durchgeführt werden zu können.

Wir machen deshalb die vereinfachende Annahme, daß wir die dritte Stundenlinie und damit das System (I) derselben Aufgabe unserer Untersuchung zugrunde legen. Setzen wir außerdem noch $\varphi = 45^0$ und $\operatorname{tang}\delta = u$, so lassen sich die Formeln (I) auch so schreiben:

$$\cos\frac{m}{n}s_0 \pm i\sin\frac{m}{n}s_0 = \left(-\operatorname{tang}\varphi\cdot\operatorname{tang}\delta \pm i\cdot\sqrt{1-\operatorname{tang}^2\varphi\cdot\operatorname{tang}^2\delta}\right)^{\frac{m}{n}}$$

Daraus ergibt sich

$$2\cdot\cos\frac{m}{n}s_0 = \left(-\operatorname{tang}\varphi\cdot\operatorname{tang}\delta + i\cdot\sqrt{1-\operatorname{tang}^2\varphi\cdot\operatorname{tang}^2\delta}\right)^{\frac{m}{n}} + \left(-\operatorname{tang}\varphi\cdot\operatorname{tang}\delta - i\cdot\sqrt{1-\operatorname{tang}^2\delta\cdot\operatorname{tang}^2\varphi}\right)^{\frac{m}{n}}$$

$$2\cdot\sin\frac{m}{n}s_0 = \frac{1}{i}\left[\left(-\operatorname{tang}\varphi\cdot\operatorname{tang}\delta + i\cdot\sqrt{1-\operatorname{tang}^2\varphi\cdot\operatorname{tang}^2\delta}\right)^{\frac{m}{n}} - \left(-\operatorname{tang}\varphi\cdot\operatorname{tang}\delta - i\cdot\sqrt{1-\operatorname{tang}^2\varphi\cdot\operatorname{tang}^2\delta}\right)^{\frac{m}{n}}\right]$$

Die allgemeinsten Gleichungen von Temporärstundenlinien sind demnach diese:

$$\left.\begin{aligned} x &= q\cdot\frac{\frac{1}{2}\cdot\sin\varphi\left[\left(-\operatorname{tang}\varphi\cdot\operatorname{tang}\delta+i\cdot\sqrt{1-\operatorname{tang}^2\delta\cdot\operatorname{tang}^2\varphi}\right)^{\frac{m}{n}}+\left(-\operatorname{tang}\varphi\cdot\operatorname{tang}\delta-i\cdot\sqrt{1-\operatorname{tang}^2\delta\cdot\operatorname{tang}^2\varphi}\right)^{\frac{m}{n}}-\cos\varphi\cdot\operatorname{tang}\delta\right]}{\sin\varphi\cdot\operatorname{tang}\delta+\frac{1}{2}\cos\varphi\cdot\left[\left(-\operatorname{tang}\varphi\cdot\operatorname{tang}\delta+i\cdot\sqrt{1-\operatorname{tang}^2\delta\cdot\operatorname{tang}^2\varphi}\right)^{\frac{m}{n}}+\left(-\operatorname{tang}\varphi\cdot\operatorname{tang}\delta-i\cdot\sqrt{1-\operatorname{tang}^2\varphi\cdot\operatorname{tang}^2\delta}\right)^{\frac{m}{n}}\right]} \\ y &= q\cdot\frac{\frac{1}{2i}\left[\left(-\operatorname{tang}\delta\cdot\operatorname{tang}\varphi+i\cdot\sqrt{1-\operatorname{tang}^2\varphi\cdot\operatorname{tang}^2\delta}\right)^{\frac{m}{n}}-\left(-\operatorname{tang}\varphi\cdot\operatorname{tang}\delta-i\cdot\sqrt{1-\operatorname{tang}^2\varphi\cdot\operatorname{tang}^2\delta}\right)^{\frac{m}{n}}\right]}{\sin\varphi\cdot\operatorname{tang}\delta+\frac{1}{2}\cdot\cos\varphi\cdot\left[\left(-\operatorname{tang}\varphi\cdot\operatorname{tang}\delta+i\cdot\sqrt{1-\operatorname{tang}^2\varphi\cdot\operatorname{tang}^2\delta}\right)^{\frac{m}{n}}+\left(-\operatorname{tang}\varphi\cdot\operatorname{tang}\delta-i\cdot\sqrt{1-\operatorname{tang}^2\varphi\cdot\operatorname{tang}^2\delta}\right)^{\frac{m}{n}}\right]} \end{aligned}\right\} \text{(II)}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{y}{q\cdot\sqrt{2}} &= \frac{\sqrt{1+u}}{\sqrt{1-u}+u\cdot\sqrt{2}} \\ \frac{x}{q} &= \frac{\sqrt{1-u}-u\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{1-u}+u\cdot\sqrt{2}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (I)$$

Hieraus läßt sich der Differentialquotient $\frac{dy}{dx}$, welcher bekanntlich die Steigerung der Kurve ausdrückt, unschwer bestimmen. Man hat nämlich, falls man den Nenner der vorstehenden Gleichungen (I) mit N bezeichnet:

$$\frac{1}{q\cdot\sqrt{2}}\cdot\frac{dy}{du} = \left[\left(\sqrt{1-u}+u\sqrt{2}\right)\left(+\frac{1}{2\cdot\sqrt{1+u}}\right)-\sqrt{1+u}\left(\frac{-1}{2\sqrt{1-u}}+\sqrt{2}\right)\right]:N^2$$

$$\frac{1}{q}\cdot\frac{dy}{du} = \frac{(u+2)\left(-\sqrt{1-u}\right)+\sqrt{2}}{\sqrt{1-u^2}\cdot N^2}.$$

Ebenso folgt

$$\frac{1}{q}\cdot\frac{dx}{du} = \left[\left(\sqrt{1-u}+u\sqrt{2}\right)\left(-\frac{1}{2\sqrt{1-u}}-\sqrt{2}\right) - \left(\sqrt{1-u}-u\sqrt{2}\right)\left(\frac{1}{2\sqrt{1-u}}+\sqrt{2}\right)\right]:N^2$$

$$= \frac{(u-2\sqrt{2}}{\sqrt{1-u}\cdot N^2}$$

Daraus ergibt sich

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{2}-(2+u)\cdot\sqrt{1-u}}{\sqrt{2}(u-2)\cdot\sqrt{1+u}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (II)$$

Zur bequemeren numerischen Auswertung von (II) setzen wir statt

$$(1\pm u)^{\frac{1}{2}} \text{ die Potenzreihen: } 1\pm\tfrac{1}{2}u-\tfrac{1}{8}u^2\pm\ldots,$$

die wir wegen der Kleinheit von u ($\operatorname{tang}\varepsilon < 0{,}44$) beim 2. Gliede abbrechen dürfen. Es verwandelt sich (II) dadurch in

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{2}-(2+u)\,(1-\frac{1}{2}u)}{\sqrt{2}(u-2)\,(1+\frac{1}{2}u)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (III)$$

womit man leicht folgende Zahlenreihen gewinnt:

Für	$\operatorname{tang}\delta = +0{,}4$	wird	$\frac{dy}{dx} = 0{,}187$
„	„ $= +0{,}3$	„	„ $= 0{,}200$
„	„ $= +0{,}2$	„	„ $= 0{,}203$
„	„ $= +0{,}1$	„	„ $= 0{,}208$
„	„ $= 0{,}0$	„	„ $= 0{,}208$
„	„ $= -0{,}1$	„	„ $= 0{,}205$
„	„ $= -0{,}2$	„	„ $= 0{,}193$
„	„ $= -0{,}3$	„	„ $= 0{,}230$

Die Werte $\text{tang}\,\delta = 0{,}4$ und $\text{tang}\,\delta = -0{,}3$ umfassen alle Sonnendeklinationen von $\delta =$ rund $+22^0$ bis $\delta =$ etwa -17^0. Die extremsten Werte für $\frac{dy}{dx}$, nämlich 0,187 und 0,230 gehören zu Steigungswinkeln von ungefähr $10^0 35'$ und 13^0, so daß der Richtungsunterschied der Tangenten zwischen den Stellen $\delta = +22^0$ und $\delta = -17^0$ selbst in der Breite von $\varphi = 45^0$ nur wenige Grade beträgt. Daß er für $\varphi = 30^0$ noch geringer ist, weist Delambre nach (a. a. O. pag. 476 ff.), freilich auf ganz andere Art als dies hier geschehen ist.

Daß die temporären Stundenlinien bei geringer Ortsbreite φ innerhalb des Intervalls $\delta = \pm\varepsilon$ fast geradlinig sein müssen, läßt sich übrigens a priori einsehen. Am Äquator dauert der Tag stets zwölf Stunden Dort fallen also die äquinoktialen und temporären Stunden vollständig zusammen. Die Stundenlinie für die sog. hora aequinoctialis ist aber stets eine gerade Linie, wie in Aufgabe 45 gezeigt ist. Für kleine Werte für φ und δ kann auch eine hora temporalis sich nicht beträchtlich von der Dauer einer hora aequinoctialis unterscheiden, mithin auch die temporäre Stundenlinie nicht allzusehr von einer Geraden abweichen.

51. Aufgabe. Einem zylindrischen Gefäß entströmt durch ein an seinem unteren Rande angebrachtes Ansatzrohr Wasser. Man soll auf dem Zylindermantel die Niveaukurven konstruieren welche den Temporärstunden der Wasseruhr entsprechen.

Mit solchen arabischen Wasseruhren, bei denen sich das Gefäß nach einer gewissen Zeit ganz entleert und nicht, wie dies gewöhnlich der Fall ist, das Wasser auf unveränderlichem Niveau erhalten wird, hat uns zuerst Baron Carra de Veaux bekannt gemacht, indem er im Journal asiatique 1891 unter der Überschrift: „Notices sur deux manuscrits arabes“ die Einrichtung eines solchen Zeitmeßwerkes, das die Araber „Taġâr“ nannten, genauer beschrieb. Die beiden Deckflächen des Zylinders, der aus Glas war, wurden zuerst an ihrer Peripherie in zwölf gleiche Teile geteilt und dann entsprechende Teilpunkte durch parallele Mantellinien verbunden. (Fig. 23.) Diese Teilung entsprach den zwölf Tierkreisbildern der Ekliptik. Handelte es sich um gleiche Stunden, so würden die einzelnen Stundenlinien — Niveaukurven — als gleichabständige Kreise parallel zu den Deckflächen die Gefäßwand umziehen. Ganz anders aber verhält es sich bei den temporären Niveaukurven. Sie können in keiner Parallelebene zum Horizont verlaufen, da die temporären Stunden im Sommer, bei positiver Sonnendeklination, länger sind als im Winter; folglich im Sommer während einer solchen Stunde bedeutend mehr Wasser ausfließt als in den Wintermonaten. Die Niveaukurve sinkt deshalb, während die Sonne die astronomische Länge von 0^0 bis 180^0 hat, sich also vom Widder (♈) bis zur Wage (♎) bewegt, auf dem Mantel des Gefäßes herab, um sich zwischen der Sonnenlänge von 180^0 bis 360^0 über das Niveau der gleichen Stunden hinaufzuheben. Zur Zeit der Äquinoktien durchschneiden sich die gleichen und die temporären Stundenlinien, weil dann der Tag allerorts zwölf Stunden lang ist.

Wir gehen jetzt dazu über, die Gleichung einer solchen räumlichen Stundenlinie aufzustellen. Da der Polarwinkel auf der Basis des Zylinders sich als astronomische Länge l der Sonne darstellt, so müssen wir erst die Temporärstunde in l, als der unabhängigen Variablen, ausdrücken. Wir fanden in Aufgabe 48

$$\text{Tempor. Stunde} = \frac{2 \arccos(-\operatorname{tang}\varphi \cdot \operatorname{tang}\delta)}{\pi} \quad \ldots \quad \text{(I)}$$

Nun ist nach einer früheren Formel

$$\sin\delta = \sin\varepsilon \cdot \sin l,$$

folglich

$$\operatorname{tang}\delta = \frac{\sqrt{1 - \sin^2\varepsilon \cdot \sin^2 l}}{\sin\varepsilon \cdot \sin l}.$$

Damit geht (I) über in

$$\text{Tempor. Stunde} = \frac{2 \arccos\left(-\operatorname{tang}\varphi \cdot \frac{\sqrt{1 - \sin^2\varepsilon \cdot \sin^2 l}}{\sin\varepsilon \cdot \sin l}\right)}{\pi} \quad \ldots \quad \text{(II)}$$

Zum leichteren praktischen Gebrauch führen wir die rechte Seite von (II) in eine Potenzreihe über. Zunächst ist nach dem binomischen Satze

$$\frac{\sin\varepsilon \cdot \sin l}{\sqrt{1 - \sin^2\varepsilon \cdot \sin^2 l}} = \sin\varepsilon \cdot \sin l (1 - \sin^2\varepsilon \cdot \sin^2 l)^{-\frac{1}{2}} = \sin\varepsilon \cdot \sin l + \tfrac{1}{2}\sin^3\varepsilon \cdot \sin^3 l + \ldots$$

Ferner ist nach früherem

$$\begin{aligned}
&\arccos\left(-\operatorname{tang}\varphi \cdot \frac{\sin\varepsilon \cdot \sin l}{\sqrt{1 - \sin^2\varepsilon \cdot \sin^2 l}}\right) \\
&= \frac{\pi}{2} - \arcsin\left[-\operatorname{tang}\varphi\,(\sin\varepsilon \cdot \sin l + \tfrac{1}{2}\sin^3\varepsilon \cdot \sin^3 l + \ldots)\right] \\
&= \frac{\pi}{2} - \left[-\operatorname{tang}\varphi\,(\sin\varepsilon \cdot \sin l + \tfrac{1}{2}\sin^3\varepsilon \cdot \sin^3 l + \ldots)\right. \\
&\qquad \left. - \tfrac{1}{6}\operatorname{tang}^3\varphi\,(\sin\varepsilon \cdot \sin l + \tfrac{1}{2}\sin^3\varepsilon \cdot \sin^3 l)^3 - \ldots\right] \\
&= \frac{\pi}{2} + \operatorname{tang}\varphi \cdot \sin\varepsilon \cdot \sin l + \tfrac{1}{2}\operatorname{tang}\varphi \cdot \sin^3\varepsilon \cdot \sin^3 l + \ldots \\
&\qquad + \tfrac{1}{6}\operatorname{tang}^3\varphi \sin^3\varepsilon \cdot \sin^3 l + \ldots
\end{aligned}$$

$$\text{Temp. Stunde} = 1 + \frac{\sin\varepsilon \cdot \sin l \cdot \operatorname{tang}\varphi}{\pi}\left(2 + \sin^2\varepsilon \cdot \sin^2 l + \frac{\operatorname{tang}^2\varphi \cdot \sin^2\varepsilon \cdot \sin^2 l}{3} + \ldots\right) \quad \text{(III)}$$

und dies ist die für unsere Aufgabe gesuchte Reihe, die bei nicht allzugroßer Polhöhe φ rasch konvergiert, da $\sin\varepsilon = \frac{2}{5}$ ist.

An Figur 23 sind auf dem Umfang in Abständen von je 30° die zwölf Tierkreisbilder angebracht. Die Zählung der Länge l beginne, wie in der Astronomie üblich, beim Beginn des Widder (♈). Bezeichnet man die Höhe des

Gefäßes mit d, und sind die Koordinaten eines Punktes der n.ten Temporärstundenlinie x, y und z, so hat man

$$\left.\begin{aligned} x &= r \cdot \cos l \\ y &= r \cdot \sin l \\ z &= d - \frac{nd}{12\pi} \cdot \arccos\left(-\operatorname{tang}\varphi \cdot \frac{\sin\varepsilon \cdot \sin l}{\sqrt{1-\sin^2\varepsilon \cdot \sin^2 l}}\right) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad \text{(IV)}$$

Es ist klar, daß, wenn das Gefäß für zwölf Äquinoktialstunden Wasser faßt, es nicht für zwölf Temporärstunden während des Sommers genügt, hingegen für mehr als zwölf solcher Winterstunden ausreicht. Das Gefäß ist entleert für $z = 0$. Damit folgt aus der dritten der Gleichungen (IV):

$$\frac{n \cdot d}{12}\left(1 + \frac{2}{\pi} \cdot \operatorname{tang}\varphi \cdot \sin\varepsilon \cdot \sin l + \frac{1}{\pi}\operatorname{tang}\varphi \cdot \sin^3\varepsilon \cdot \sin^3 l + \frac{1}{3\pi}\operatorname{tang}^3\varphi \cdot \sin^3\varepsilon \cdot \sin^3 l + \ldots\right) = d,$$

das ist

$$n = \frac{36 \cdot \pi}{3\pi + 6 \cdot \operatorname{tang}\varphi \cdot \sin\varepsilon \cdot \sin l + 3\operatorname{tang}\varphi \cdot \sin^3\varepsilon \cdot \sin^3 l + \operatorname{tang}^3\varphi \cdot \sin^3\varepsilon \cdot \sin^3 l + \ldots} \quad \text{(V)}$$

Für $l = 90^0$ (Sommeranfang) und $\varphi = 45^0$ findet man aus (V):

$$n = \frac{36\pi}{3\pi + 6\sin\varepsilon + 4\sin^3\varepsilon} = 10^h 24^m$$

Für $l = 270^0$ (Winteranfang) aber ist

$$n = \frac{36\pi}{3\pi - 6\sin\varepsilon - 4\sin^3\varepsilon} = 14^h 10^m \text{ (aufgerundet).}$$

Da der Zylindermantel in die Ebene abwickelbar ist, so lassen sich die Niveaulinien als ebene Kurven konstruieren. Ein beliebiger Punkt einer solchen Schlangenlinie in der Ebene hat dann die Koordinaten

$$\left.\begin{aligned} x &= r \cdot l \\ y &= d - \frac{nd}{12\pi} \cdot \arccos\left[-\operatorname{tang}\varphi \cdot \frac{\sin\varepsilon \cdot \sin l}{\sqrt{1-\sin^2\varepsilon \cdot \sin^2 l}}\right] \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad \text{(VI)}$$

Für $l = 0^0$ und $l = 180^0$ findet man reelle Wendepunkte der durch die Gleichungen (IV) dargestellten Kurve, auf deren Diskussion wir hier jedoch nicht näher eingehen wollen.

52. Aufgabe. Wie lautet die Gleichung derjenigen Bahn, in welcher sich die Sonne in bezug auf die Erde im Laufe eines Jahres zu bewegen scheint? Die Bewegung der Sonne längs der Ekliptik ist als gleichförmig anzusehen.

Diese fragliche Bahn ist bekanntlich eine Schraubenlinie auf der Himmelskugel, die hervorgeht aus dem scheinbaren Umschwung der letzteren in Verbindung mit der zu- und abnehmenden Deklinationsänderung der Sonne, die keine abrupte, sondern eine stetige ist. Die Gleichung findet sich bei

A. Höfler: Didaktik der Himmelskunde und der astronomischen Geographie, Leipzig 1913, pag. 120 etwa in folgender Weise abgeleitet: Wenn die Sonne zu einer gewissen Zeit nach der Frühlingsnachtgleiche in S steht, so ist ihre Länge $= l$ und ihre Deklination $= \delta$. (Fig. 24.) Die Ekliptik wird von der Sonne in $365\frac{1}{4}$ Tagen durchlaufen; sie hat 360 Grade, und es wird somit von der Sonne Tag für Tag ein Weg von $\frac{360^0}{365\frac{1}{4}} = 0{,}986^0$ zurückgelegt, mithin ist der Sonnenweg in einer Stunde $= \frac{0{,}986^0}{24} = \frac{0{,}493^0}{12}$. In S stehend, habe die Sonne die Deklination δ, in U_1 die Deklination $\delta + y$. Während die Deklination von δ auf $\delta + y$ wächst, hat sich auch die Länge der Sonne von l auf l_1 vergrößert, gleichzeitig hat sich das Himmelsgewölbe um den Winkel $RPR_1 = x$ gedreht. Damit die Sonne zur Deklination δ komme, soll das Firmament bereits n Umdrehungen zurückgelegt haben, so daß $l = n \cdot 0{,}986^0$ ist. Die Verwandlung des Drehungswinkels x in Sonnenlänge ergibt sich aus folgender Proportion:

$$360^0 : x^0 = 0{,}986 : (l_1 - l),$$

woraus folgt

$$l_1 - l = \frac{0{,}986}{360} \cdot x, \quad \text{oder}$$

$$l_1 = l + \frac{0{,}986}{360} \cdot x = n \cdot 0{,}986 + \frac{0{,}986}{360} \cdot x$$

Für das rechtwinklige sphärische Dreieck γSR gilt

$$\sin\delta = \sin\varepsilon \cdot \sin l,$$

also ist ganz entsprechend für den Sonnenort U_1:

$$\sin(\delta + y) = \sin\varepsilon \cdot \sin\left[n \cdot 0{,}986 + \frac{0{,}986}{360} \cdot x\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(I)}$$

Mit $n = 0$ ist auch $\delta = 0^0$, und man hat daher, falls man die Schraubenlinie $\frac{x}{15}$ Stunden nach ihrem Ausgangspunkt aus dem Widder betrachtet, für ihre Äquatorkoordinaten die einfachere Gleichung

$$\sin y = \sin\varepsilon \cdot \sin\frac{0{,}986}{360} \cdot x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(II)}$$

53. Aufgabe. Die Sonne habe an einem gegebenen Orte bei ihrem Durchgang durch den Meridian die Deklination δ. Zu welcher Zeit geht sie dann des Nachmittags unter, wenn man ihre schraubenförmige Bewegung berücksichtigt?

Bei unveränderlicher Sonnendeklination δ wäre der halbe Tagbogen der Sonne bestimmt durch

$$\cos SPU = -\operatorname{tang}\varphi \cdot \operatorname{tang}\delta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(I)}$$

(Vgl. Fig. 24 und die Ausführungen in Aufgabe 1.)

Aber die progressive Deklinationsveränderung der Sonne bewirkt, daß sie nicht in U, sondern in U_1 zum Untergang kommt, wo sie bereits die Deklination $\delta + y$ angenommen hat, zu der der Stundenwinkel $SPU_1 = x$ gehört. Man hat für denselben

$$\cos x = -\operatorname{tang}\varphi \cdot \operatorname{tang}(\delta + y) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(II)}$$

Für $\operatorname{tang}(\delta + y)$ findet man aus (I) der Aufgabe 52

$$\operatorname{tang}(\delta + y) = \frac{\sin\varepsilon \cdot \sin\left(n \cdot 0{,}986 + \frac{0{,}986}{360} \cdot x\right)}{\sqrt{1 - \sin^2\varepsilon \cdot \sin^2\left(n \cdot 0{,}986 + \frac{0{,}986}{360} \cdot x\right)}},$$

womit (II) übergeht in

$$\cos x = -\frac{\operatorname{tang}\varphi \cdot \sin\varepsilon \cdot \sin\left(n \cdot 0{,}986 + \frac{0{,}986}{360} \cdot x\right)}{\sqrt{1 - \sin^2\varepsilon \cdot \sin^2\left(n \cdot 0{,}986 + \frac{0{,}986}{360} \cdot x\right)}} \quad . \quad . \quad . \quad \text{(III)}$$

Aus der transzendenten Gleichung (II) ist der Winkel x zu berechnen und in Zeit zu verwandeln. Man wird in diesem Falle um so mehr eine Näherungsmethode anwenden, als man aus (II) bereits einen approximativen Wert für den Winkel des Sonnenuntergangs kennt. Für den Vormittag liegt der Fall gerade umgekehrt: Die Sonne hat beim Aufgang eine kleinere Deklination wie beim Durchgang durch den Meridian, mithin ist der Tagbogen des Vormittags kürzer als der des Nachmittags. Diese Betrachtung kann auch auf die scheinbare Bewegung des Mondes angewandt werden, bei dem der zeitliche Unterschied zwischen Aufgang — Kulmination und Kulmination — Untergang viel mehr hervortritt als bei der Sonne.

(Es bedarf kaum der Erwähnung, daß, falls man in Fig. 24 $\measuredangle SPU$ als halben Tagbogen nimmt, statt $\measuredangle B_1PU$, wie immer üblich, die Zeichnung in ganz veränderter perspektivischer Ansicht entworfen werden müßte.)

54. Aufgabe. Man ziehe nach der in eine Anzahl gleicher Teile (z. B. 36) geteilten Peripherie eines Kreises Radien und trage auf ihnen vom Mittelpunkte aus folgeweise alle Mittagsschatten des ganzen Jahres, sowie die Schattenlängen, die ein Gnomon zu jeder anderen Stunde erzeugt, ab. Welches ist alsdann die Gleichung der Kurve, die man durch Verbindung der Schattenenden erhält?

Der dieser Konstruktion zugrunde gelegte Hilfskreis ist die Ekliptik. Ein beliebiger Tag des Jahres definiert dann eine ganz bestimmte Länge in der Ekliptik, und die Enden der Schatten des Gnomons werden auf einem Strahl liegen, der zum Nullstrahl ($l = 0^0 =$ Äquinoktium) den Winkel l bildet. Hat man für die Längen 0^0, 10^0, 20^0, 30^0 . . . . 360^0 Kurvenpunkte ermittelt und sie durch einen stetigen Linienzug verbunden, so wird ein beliebiger Strahl von selbst die seiner Neigung zum Nullstrahl zugehörigen Schatten der Mittagsstunde, der 1., 2. und folgenden Stunden aus den Kurven ausschneiden.

Für nicht allzu große Ansprüche an Genauigkeit läßt uns also dies Verfahren auf rein graphischem Wege jedwede Schattenlänge eines Stabes von bekannter Höhe q an einem gegebenen Orte der Breite φ finden. Diese Schatten spielten bei der Anfertigung arabischer Sonnenuhren eine hervorragende Rolle, weshalb wir auch bei den arabischen Astronomen solche Hilfskonstruktionen in der praktischen Gnomonik angewandt finden. Da die Kurven zumeist ovale Gestalt hatten, so wurde die Marmorplatte, auf welcher dieselben verzeichnet waren, Ḥâfir (= Huf, Klaue) genannt.

Für die Ableitung der Gleichung einer Ḥâfirkurve sei der Kreismittelpunkt oder Fußpunkt des Gnomons Koordinatenanfangspunkt. Dann ist die Länge ϱ des Schattens eine Funktion des Ortes der Sonne in der Ekliptik. Wir nehmen die astronomische Länge derselben als Polarwinkel; die X-Achse definiere die Längen $l = 0^0$ und $l = 180^0$, während die Y-Achse die Längen $l = 90^0$ und $l = 270^0$ ausschneidet. Zunächst suchen wir die Gleichung für den Ḥâfir des wahren Mittags aufzustellen. Die Mittagshöhe der Sonne ist

$$H = 90^0 - (\varphi - \delta),$$

folglich ist

$$\varrho = q \cdot \operatorname{cotg} H = q \cdot \operatorname{cotg} [90^0 - (\varphi - \delta)] = q \cdot \operatorname{tang} (\varphi - \delta)$$

$$= q \cdot \frac{\operatorname{tang}\varphi - \operatorname{tang}\delta}{1 + \operatorname{tang}\varphi \cdot \operatorname{tang}\delta} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\mathrm{I})$$

Die Deklination der Sonne drückt sich aber bekanntlich durch

$$\sin\delta = \sin\varepsilon \cdot \sin l$$

aus, so daß

$$\operatorname{tang}\delta = \frac{\sin\varepsilon \cdot \sin l}{\sqrt{1 - \sin^2\varepsilon \cdot \sin^2 l}}$$

wird. Setzt man diesen Wert für $\operatorname{tang}\delta$ rechter Hand in (I) ein, so hat man schon die Polargleichung für den Ḥâfir des wahren Mittags:

$$\varrho = q \cdot \frac{\operatorname{tang}\varphi - \dfrac{\sin\varepsilon \cdot \sin l}{\sqrt{1 - \sin^2\varepsilon \cdot \sin^2 l}}}{1 + \operatorname{tang}\varphi \cdot \dfrac{\sin\varepsilon \cdot \sin l}{\sqrt{1 - \sin^2\varepsilon \cdot \sin^2 l}}} \quad \ldots\ldots \quad (\mathrm{II})$$

Dabei ist l von 0^0 bis 360^0 zu zählen.

Für einen Ort des Äquators, wo $\operatorname{tang}\varphi = 0$ wird, vereinfacht sich (II) zu

$$\varrho = q \cdot \frac{\sin\varepsilon \cdot \sin l}{\sqrt{1 - \sin^2\varepsilon \cdot \sin^2 l}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\mathrm{III})$$

Wir gehen jetzt mittels der Beziehung

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tang} l$$

auf rechtwinklige Koordinaten über und finden durch einfache Rechnung aus (III) eine sog. Parameterdarstellung für x und y, nämlich:

$$\left.\begin{aligned} x &= \pm\varrho\cdot\frac{\sqrt{q^2\cdot\sin^2\varepsilon-\varrho^2\cdot\sin^2\varepsilon}}{\sin\varepsilon\cdot\sqrt{\varrho^2+q^2}} \\ y &= \pm\frac{\varrho^2}{\sin\varepsilon\cdot\sqrt{\varrho^2+q^2}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \text{(IV)}$$

Hieraus ist ersichtlich, daß dieser Ḥâfir aus zwei kongruenten Hälften besteht, die im Anfangspunkt des Koordinatensystems zusammenhängen; denn dort ist $\varphi = x = y = 0$. Gleichung (IV) ermöglicht eine Diskussion der Kurve; die Elimination von ϱ führt hingegen auf eine Gleichung vierten Grades in x und y. Wir haben die ausführliche Diskussion des Systems (IV) in unserer Arabischen Gnomonik gegeben; hier müssen wir uns darauf beschränken, deren Resultate mitzuteilen.

Zweimal im Jahr passiert die Sonne den Äquator (21. 3. und 23. 9.), erreicht mithin unter $\varrho = 0^0$ das Zenit, so daß an diesen Tagen der Mittagsschatten $= 0$ ist. Der Ḥâfir muß daher eine zweimal durch den Anfangspunkt des Koordinatensystems gehende Kurve, ein zur X-Achse symmetrisch liegendes Doppeloval, sein. Da nach dem Äquinoktium δ schnell wächst oder abnimmt, so muß ein solches Oval vom Nullpunkt aus erst ziemlich weit nach rechts und links ausscheren, um dann allmählich anzusteigen oder nach unten zu fallen.

Ebenso muß ϱ nach (I) für jeden anderen Ort der Erde zweimal $= 0$ werden, wenn $\delta = \varphi$ ist (also nur in der heißen Zone). Doch sind dann nicht mehr beide Hälften des Ḥâfir symmetrisch.

Außerhalb der heißen Zone hat ϱ das ganze Jahr einen endlichen Wert.

Der Mittagsḥâfir am Äquator hat wagerechte Tangenten für

$$\varrho_1 = 0$$

und

$$\varrho_2 = \pm q\cdot\operatorname{tang}\varepsilon,$$

senkrechte Tangenten für

$$\varrho = \pm\sqrt{-q^2\cdot\operatorname{tang}^2\varepsilon \pm q\cdot\operatorname{tang}\varepsilon\cdot\sqrt{1+q^2\operatorname{tang}^2\varepsilon}}$$

Reelle Wendepunkte finden sich bei etwa $\delta = \pm 17^0$.

Man kann auch die Gleichung eines Ḥâfir für eine beliebige Stunde und unter der Annahme $\varphi = 0$, leicht entwickeln. Für die beliebige Sonnenhöhe h ist

$$\varrho = q\cdot\operatorname{cotg} h = q\cdot\frac{\sqrt{1-\sin^2 h}}{\sin h}$$

Aus dem Zenit—Pol—Sonnendreieck folgt

$$\sin h = \sin\delta\cdot\sin\varphi + \cos\delta\cdot\cos\varphi\cdot\cos s$$

und hiermit

$$\varrho = q\cdot\frac{\sqrt{1-(\sin\delta\cdot\sin\varphi+\cos\delta\cdot\cos\varphi\cdot\cos s)^2}}{\sin\delta\cdot\sin\varphi+\cos\delta\cdot\cos\varphi\cdot\cos s}$$

Es ist aber

$$\sin\delta = \sin\varepsilon \cdot \sin l; \quad \cos\delta = \sqrt{1 - \sin^2\varepsilon \cdot \sin^2 l},$$

womit wir erhalten

$$\varrho = q \cdot \frac{\sqrt{1 - (\sin\varepsilon \cdot \sin\varphi \cdot \sin l + \cos\varphi \cdot \cos s \cdot \sqrt{1 - \sin^2\varepsilon \cdot \sin^2 l}}}{\sin\varepsilon \cdot \sin\varphi \cdot \sin l + \cos\varphi \cdot \cos s \cdot \sqrt{1 - \sin^2\varepsilon \cdot \sin^2 l}} \quad . \qquad (V)$$

Dies ist die Polargleichung des allgemeinsten Ḥâfir. Setzt man hierin wiederum zur Vereinfachung $\varphi = 0$, so findet man nach einigen Umrechnungen die (IV) analoge Parameterdarstellung:

$$\left.\begin{aligned} x &= \pm\varrho \cdot \frac{\sqrt{q^2 - (\varrho^2 + q^2) \cdot \cos^2 s \cdot \cos^2\varepsilon}}{\cos s \cdot \sin\varepsilon \cdot \sqrt{\varrho^2 + q^2}} \\ y &= \pm\varrho \cdot \frac{\sqrt{\varrho^2 \cdot \cos^2 s - q^2 \cdot \sin^2 s}}{\cos s \cdot \sin\varepsilon \cdot \sqrt{\varrho^2 + q^2}} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (VI)$$

Ausdrücke, die für $s = 0^0$, d. h. den wahren Mittag, sofort in die Formeln (IV) übergehen.

55. Aufgabe. Nach den mohammedanischen Religionslehrern Mâleh und Hambeleh ist das Aṣr jene Zeit des Nachmittags, die in dem Augenblick eintritt, in welchem der Horizontalschatten gleich dem Mittagsschatten (m) vermehrt um die Länge (q) des Gnomons ist. Welches ist der geometrische Ort aller Endpunkte dieser so definierten Nachmittagsschatten auf dem Zifferblatt einer Bazithah? (Horizontalsonnenuhr)

Das Aṣr ist die wichtigste Gebetszeit der Araber (al—Aṣr=Nachmittag = temps de la sieste). Es ist deshalb verständlich, daß man zu ihrer gewissenhaften Innehaltung genauer Vorschriften bedarf. Man erhält konstruktiv leicht Punkte der fraglichen Kurve, wenn man alle Tageshyperbeln mit den Kreisen zum Schnitt bringt, die man um den Fußpunkt des Gnomons als Mittelpunkt mit einem jeweiligen Radius: Mittagsschatten + Länge des Gnomons ($m + q$) beschreibt. Mithin ist die Gleichung der Aṣr = Kurve das Resultat der Elimination von δ aus der Gleichung der Tageshyperbel und der des eben näher bezeichneten Kreises. Die erstere lautet (Aufgabe 44):

$$\left.\begin{aligned} &x^2 \cdot (\sin^2\delta - \cos^2\varphi) + y^2 \cdot \sin^2\delta + q \cdot x \cdot \sin^2\varphi + q^2 \cdot (\sin^2\delta - \sin^2\varphi) = 0 \\ &\text{und die zweite} \\ &\varrho = q[1 + \operatorname{tang}(\varphi - \delta)] \end{aligned}\right\} \qquad (I)$$

Unter Beachtung, daß in rechtwinkligen Koordinaten $\varrho^2 = x^2 + y^2$ ist, findet man aus (I)

$$\sin^2\delta = \frac{x^2 \cdot \cos^2\varphi + q^2 \cdot \sin^2\varphi - q \cdot x \cdot \sin 2\varphi}{\varrho^2 + q^2},$$

und aus (II)

$$\operatorname{tang}^2\delta = \frac{\sin^2\delta}{1-\sin^2\delta} = \left[\frac{q(1+\operatorname{tang}\varphi)-\varrho}{(\varrho-q)\operatorname{tang}\varphi+q}\right]^2.$$

Damit ergibt sich weiter

$$\left[\frac{q(1+\operatorname{tang}\varphi)-\varrho}{(\varrho-q)\operatorname{tang}\varphi+q}\right]^2 = \frac{(x\cos\varphi - q\sin\varphi)^2}{\varrho^2+q^2-(x\cos\varphi-q\sin\varphi)^2},$$

$$x\cdot\cos\varphi - q\cdot\sin\varphi = \pm\frac{[q(1+\operatorname{tang}\varphi)-\varrho]\cdot\sqrt{\varrho^2+q^2}}{\sqrt{[(\varrho-q)\operatorname{tang}\varphi+q]^2+[q(1+\operatorname{tang}\varphi)-\varrho]^2}},$$

woraus wir folgende Parameterdarstellung ziehen

$$\left.\begin{aligned} x &= q\cdot\operatorname{tang}\varphi \pm \frac{1}{\cos\varphi}\cdot\frac{[q\cdot(1+\operatorname{tang}\varphi)-\varrho]\cdot\sqrt{\varrho^2+q^2}}{\sqrt{[(\varrho-q)^2+q^2]\cdot\operatorname{tang}^2\varphi+2q\cdot(1-q)\operatorname{tang}\varphi+(\varrho-q)^2+q^2}} \\ y &= \sqrt{\varrho^2-\left\{q\operatorname{tang}\varphi\pm\frac{1}{\cos\varphi}\cdot\frac{[q\cdot(1+\operatorname{tang}\varphi)-\varrho]\cdot\sqrt{\varrho^2+q^2}}{\sqrt{[(\varrho-q)^2+q^2]\cdot\operatorname{tang}^2\varphi+2q\cdot(1-q)\operatorname{tang}\varphi+(\varrho-q)^2+q^2}}\right\}^2} \end{aligned}\right\} \quad \text{(II)}$$

Das Formelsystem (II) enthält die verlangten Gleichungen für den merkwürdigen geometrischen Ort, der sich also als eine sehr verwickelte Kurve herausstellt. Wenn man jedoch $\varphi = 0^0$ setzt, also zu dem Aṣr übergeht, wie es für einen am Äquator lebenden Mohammedaner gilt, so vereinfachen sich die Gleichungen (II) zu

$$\left.\begin{aligned} x &= \pm(q-\varrho)\cdot\sqrt{\frac{\varrho^2+q^2}{q^2+(q-\varrho^2)}} \\ y &= \pm q\cdot\sqrt{q}\cdot\sqrt{\frac{2\varrho-q}{q^2+(q-\varrho)^2}} \end{aligned}\right\} \quad \text{(III)}$$

welche Ausdrücke wir in der schon so oft erwähnten Arabischen Gnomonik eingehend diskutiert haben. Hier teilen wir aus den Ergebnissen der Diskussion folgendes mit:

Die durch (III) dargestellte Kurve ist vom 8. Grade und besteht aus zwei zwiebelförmigen kongruenten Teilen, die beide die X-Achse zur Asymptote haben. Wagerechte Tangenten berühren in den Koordinatenpunkten

$$x = \pm\frac{q}{2}$$

$$y = \pm\frac{q}{2}\cdot\sqrt{2(1+\sqrt{5})},$$

während man für die Koordinaten der Berührpunkte senkrechter Tangenten findet:

$$x = \pm\frac{q}{2}$$

$$y = 0$$

Setzt man $q = 1$, so liefert die Rechnung außerdem reelle Wendepunkte innerhalb der Intervalle $\varrho > 1 < 2$ und $\varrho > 2 < 3$.

Zum Schluß behandeln wir noch die Frage: Wann beginnt das Aṣr und wann endigt es, falls nach den erwähnten Imâns sein Ende in dem Augenblick eintritt, wo der Nachmittagsschatten den Mittagsschatten um die doppelte Länge $2q$ des Gnomons übertrifft?

Bei Beginn ist die Länge des Nachmittagsschattens

$$m = q \cdot [1 + \tan(\varphi - \delta)],$$

und beim Ende

$$m_1 = q \cdot [2 + \tan(\varphi - \delta)].$$

Das Schattendreieck gibt im ersten Fall

$$\sin h = \frac{q}{\sqrt{q^2 + q^2[1 + \tan(\varphi - \delta)]^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + [1 + \tan(\varphi - \delta)]^2}}$$

und für den zweiten

$$\sin h_1 = \frac{1}{\sqrt{1 + [2 + \tan(\varphi - \delta)]^2}}.$$

Andererseits ist auch

$$\sin h = \sin\delta \cdot \sin\varphi + \cos\delta \cdot \cos\varphi \cdot \cos s,$$

woraus man zur Berechnung von Beginn und Ende des Aṣr die Gleichungen ableitet:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1 + [1 + \tan(\varphi - \delta)]^2}} &= \sin\delta \cdot \sin\varphi + \cos\delta \cdot \cos\varphi \cdot \cos s \\ \frac{1}{\sqrt{1 + [2 + \tan(\varphi - \delta)]^2}} &= \sin\delta \cdot \sin\varphi + \cos\delta \cdot \cos\varphi \cdot \cos s_1 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad \text{(IV)}$$

die man nur nach den Stundenwinkeln s und s_1 aufzulösen braucht, um die verlangten Zeitpunkte zu erfahren.

Verlag von Henri Grand in Hamburg

Diesterwegs populäre Himmelskunde

und mathematische Geographie

Neu bearbeitet von Dr. **M. Wilhelm Meyer** und Prof. Dr. **B. Schwalbe.**

21. verbesserte und vermehrte Auflage

Von Dr. **M. Wilhelm Meyer.**

Mit 2 Sternkarten, 3 Oleatentafeln, 5 mehrfarbigen Beilagen, 8 Vollbildern, über 100 in den Text gedruckten Abbildungen, einer Heliogravüre und dem Bildnis des Verfassers in Kupferstich.

Preis eleg. geh. M. 7.—, eleg. geb. M. 8.—.

Von nachstehend genannten älteren Werken meines Verlages ist noch ein kleiner Rest vorhanden:

Martus, H. C. E., Maxima und Minima. Ein geometrisches u. algebraisches Übungsbuch. Zweiter unveränderter Abdruck. Mit einer Figurentafel. **M. 1.80**

Bußler, Fr., Elemente der Arithmetik und Algebra. Für höhere Schulen sowie zum Selbstunterricht. 1881. **M. 1.80**

— Elemente der ebenen und spärischen Trigonometrie. Für höhere Schulen sowie zum Selbstunterricht. Mit 5 lithographierten Tafeln. 1881. **M. 1.60**

Graßmann, Hermann, Lehrbuch der Arithmetik für höhere Lehranstalten. 1861. **M. 2.—**

— Lehrbuch der Trigonometrie für höhere Lehranstalten. 1861. **M. 1.50**

Druck: Max Schmersow,
Kirchhain N.-L.

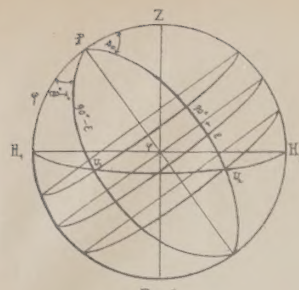

Fig. 1.

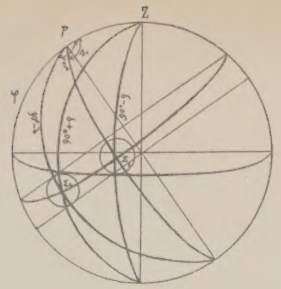

Fig. 2.

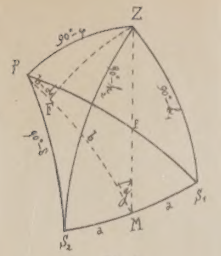

Fig. 3.

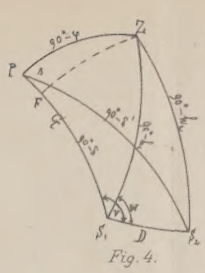

Fig. 4.

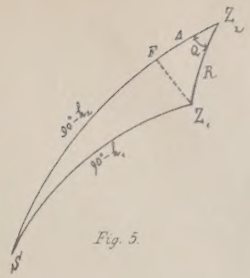

Fig. 5.

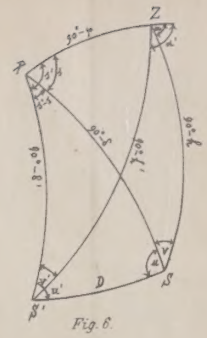

Fig. 6.

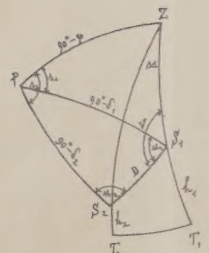

Fig. 7.

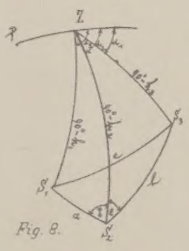

Fig. 8.

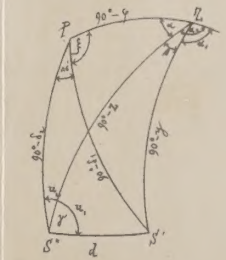

Fig. 9.

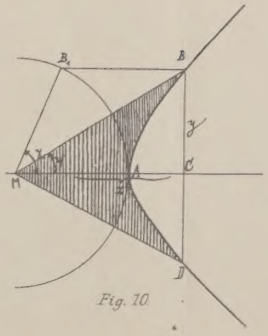

Fig. 10.

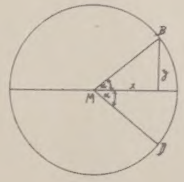

Fig. 11.

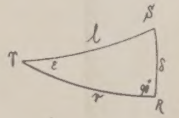

Fig. 12.

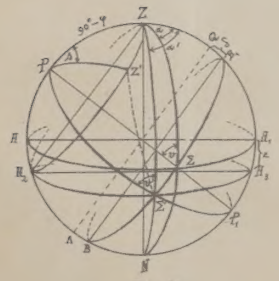

Fig. 13.

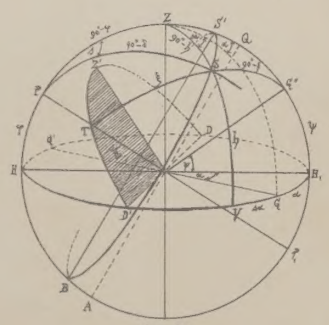

Fig. 14.

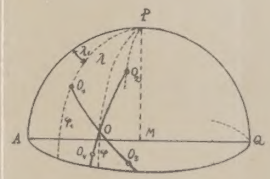

Fig. 15.

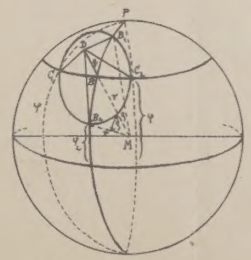

Fig. 16.

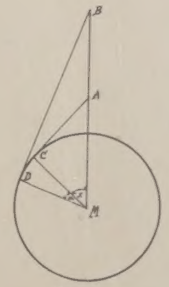

Fig. 17.

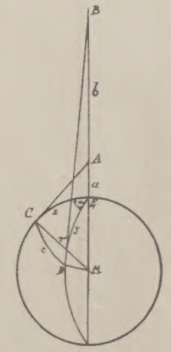

Fig. 18.

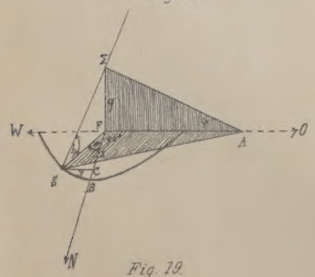

Fig. 19.

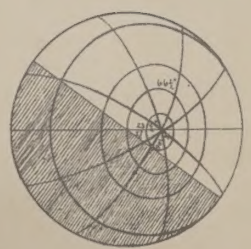

Fig. 20.

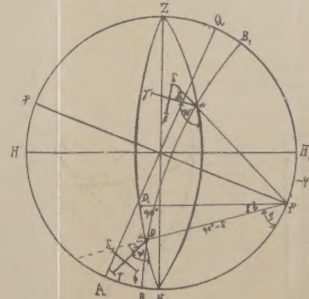

Fig. 21.

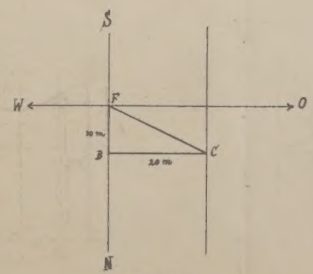

Fig. 22.

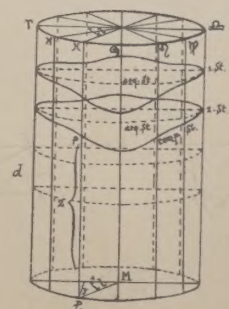

Fig. 23.

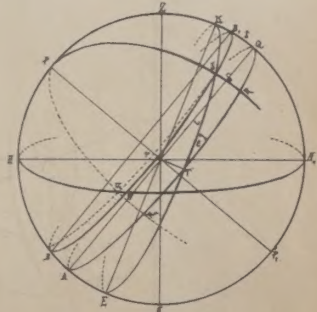

Fig. 24.

Schoy, Vermischte Aufgaben.

Henri Grand, Hamburg.

Photolith. d. geogr. lith. Anst. u. Steindr. v. C. L. Keller, Berlin S.

As
S

562435
Schoy, Karl
Vermischte Aufgaben der mathematischen Geographie und sphärisches Astronomie mit vollständigen Lösungen.

University of Toronto
Library

DO NOT
REMOVE
THE
CARD
FROM
THIS
POCKET

Acme Library Card Pocket
LOWE-MARTIN CO. LIMITED